ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 4

УЧЕБНИК и ПРАКТИКУМ

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

УМО ВО рекомендует
МО рекомендует

ЮРАЙТ издательство

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 4

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73
А42

Автор:

Аксенов Анатолий Петрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Рецензенты:

Кудрявцев Л. Д., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова;

Розанова С. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики;

Карасев В. А., кандидат технических наук, доцент Московского государственного института стали и сплавов.

Аксенов, А. П.

А42 Математический анализ. В 4 частях. Ч. 4 : учебник и практикум для вузов / А. П. Аксенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 406 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-04026-5 (ч. 4)
ISBN 978-5-534-04025-8

Данная книга представляет собой четвертую, заключительную часть учебника «Математический анализ» (учебник разделен на четыре части), который издается в рамках авторского цикла учебников по разделам высшей математики.

В четвертой части учебника изложен теоретический материал по интегральному исчислению функций нескольких переменных, теории рядов Фурье, элемен там теории поля.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение. Все сформулированные теоремы (трудные и простые), как правило, доказываются.

Соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов первых курсов высших технических учебных заведений. Может быть использован для самостоятельной подготовки и повышения квалификации.

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-04026-5 (ч. 4)
ISBN 978-5-534-04025-8

Оглавление

Предисловие

Данное пособие представляет собой последний, четвертый том четырехтомника “Математический анализ” (второй том второй части).

Учебник написан в рамках цикла книг по разделам высшей математики, составленных на основе курсов лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете, основанием для написания которого послужило желание дать достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ высшей математики.

Учебник адресован студентам первых курсов высших технических учебных заведений, обучающимся по направлениям и профилям технических специальностей высшего образования (ВО), раздел “Математический и естественнонаучный цикл” для которых содержит согласно ФГОС ВО курс “Математический анализ” или “Высшая математика”. Учебник может быть использован и для самостоятельной подготовки и повышения квалификации по базовой части этих дисциплин.

Для успешного овладения материалом обучающиеся должны хорошо знать базовый курс математического анализа (в объеме первых трех томов учебного пособия “Математический анализ”) и владеть навыками логического и алгоритмического мышления, а также математическими методами решения задач согласно требованиям стандартов среднего образования.

В четвертом томе учебника изложен теоретический материал по темам “Собственные интегралы, зависящие от параметра; дифференцирование и интегрирование по параметру”, “Двойные и тройные интегралы”, “Криволинейные интегралы первого и второго рода”, “Замена переменных в двойном интеграле”, “Поверхностные интегралы первого и второго рода”, “Несобственные интегралы, зависящие от параметра”, “Интегралы Эйлера первого и второго рода”, “Ряды и интегралы Фурье”, “Суммирование расходящихся рядов”, “Элементы теории поля”. Эти темы представляют собой продолжение материала по дифференциальному и интегральному исчислению, рассмотренному в первых трех томах.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение.

Перечисленные выше темы определяют содержание компетенций, знаний и умений, формируемых при изучении материала. В результате изучения четвертого тома учебника "Математический анализ" обучающиеся должны:

знать

- понятия кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, рядов Фурье и связанные с ними методы математического анализа;
- положения и теоретические основы интегрального исчисления функций нескольких переменных;
- методы решения прикладных задач, базирующиеся на вычислении кратных, криволинейных и поверхностных интегралов и т.п.;

уметь

- использовать полученные знания о математических понятиях, методах и моделях в практической деятельности при вычислении кратных, криволинейных и поверхностных интегралов и иных характеристик, встречающихся в курсах естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;
- применять теоретические знания для математического исследования свойств функций нескольких переменных, сходимости рядов Фурье, свойств кратных интегралов, а также анализа и интерпретации полученных результатов в прикладных задачах;
- самостоятельно формулировать, обосновывать и строго логически и математически доказывать утверждения из области теории пределов и непрерывности функций нескольких переменных, дифференциального и интегрального исчисления этих функций;
- выбирать необходимые математические методы для практического решения задач оптимизации и вычисления интегралов в многомерных пространствах и др.;

владеть

- навыками разрешения проблем, возникающих в ходе математического моделирования реальных процессов и явлений методами дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных;
- навыками работы с учебной и научной математической литературой для поиска необходимой информации по вопросам вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов;

- современными технологиями математического анализа и информационной поддержки решения задач теории функций нескольких переменных.

На основе полученных знаний у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

- способность использовать основные законы и методы дифференциального и интегрального исчисления в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования функций нескольких переменных в теоретических и экспериментальных исследованиях;
- умение выявить математическую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения физико-математический аппарат исчисления бесконечно малых и бесконечно больших функций нескольких переменных, приближенные алгоритмы на базе исследования сходимости рядов, отыскания экстремумов в многомерных пространствах;
- способность разрабатывать математические модели объектов профессиональной деятельности с привлечением дифференцирования и интегрирования функций многих переменных, а также определять характеристики реальных объектов по разработанным моделям.

Глава 7

СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§1. Определение интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Ясно, что каждому значению y из $[c,d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Введем обозначение

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]. \tag{1}$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы, зная свойства функции $f(x,y)$, получить информацию о свойствах функции $I(y)$. Эти свойства, как будет показано ниже, имеют многообразные применения, в особенности при вычислении интегралов.

Допустим еще, что при каждом закрепленном x из промежутка $[a,b]$ существует $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Тогда этот интеграл будет представлять собой функцию переменной (параметра) x, определенную в промежутке $[a,b]$. Обозначим ее через $\tilde{I}(x)$, так что

$$\tilde{I}(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy, \quad x\in[a,b]. \qquad (\tilde{\mathrm{I}})$$

§2. О допустимости предельного перехода по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x,y)\in C(\overline{P})$ и пусть y_0 — любое из $[c,d]$. Тогда

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)dx=\int_a^b f(x,y_0)\,dx. \qquad (1)$$

▶ Отметим, что $\int_a^b f(x,y)\,dx$ существует для каждого значения y из $[c,d]$, так как $f(x,y)\in C([a,b])$ при любом закрепленном $y\in[c,d]$. В частности, существует $\int_a^b f(x,y_0)\,dx$.

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. Выберем и закрепим любое $y_0\in[c,d]$.

По условию $f(x,y)\in C(\overline{P})$, поэтому $f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{P})$ (см. теорему Кантора) и, следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (x',y'), (x'',y'') из $(\overline{P})$, для которых $|x''-x'|<\delta$, $|y''-y'|<\delta$, оказывается $|f(x'',y'')-f(x',y')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Положим $y'=y_0$, $y''=y$, где y — любое, но такое, что $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$, $x'=x''=x$, где x — любое из $[a,b]$ ($|x''-x'|=0<\delta$). Тогда $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ для любого $x\in[a,b]$, если $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$. Имеем

$$\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b f(x,y_0)\,dx=\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Итак, любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что как только $|y - y_0| < \delta$, $y \in [c,d]$, так сейчас же $\left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx \right| < \varepsilon$.

Последнее означает, что $\int_a^b f(x,y_0)\,dx = \lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx$. ◀

Совершенно аналогично доказывается утверждение: если $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и если x_0 — любое из $[a,b]$, то

$$\lim_{x \to x_0} \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right) dy = \int_c^d f(x_0,y)\,dy.$$

§3. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $I(y) = C([c,d])$.

▶ Возьмем любое $y_0 \in [c,d]$ и закрепим. В §2 было доказано, что $\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$, то есть

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0).$$

Последнее же означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0. Так как y_0 — любое из $[c,d]$, то заключаем, что $I(y) \in C([c,d])$. ◀

Замечание 1. Условие $f(x,y) \in C(\overline{P})$ является достаточным для непрерывности $I(y)$ на $[c,d]$, но оно не необходимо.

Замечание 2. Совершенно аналогично доказывается **теорема**: Пусть $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и пусть $\tilde{I}(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b]$. Тогда $\tilde{I}(x) \in C([a,b])$.

Следствие. Если $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то одновременно $I(y) \in C([c,d])$, $\tilde{I}(x) \in C([a,b])$ и, следовательно, существуют одновременно

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy,$$

$$\int\limits_a^b \tilde{I}(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$, $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$ называются *повторными интегралами* от функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$.

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $(\overline{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$. Пусть $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда:

1) функция $I(y)$ имеет в промежутке $[c,d]$ производную $I'(y)$;

2) $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$, то есть $\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$;

3) $I'(y) \in C([c,d])$.

▶ Возьмем любую точку $y_0 \in [c,d]$ и закрепим. Дадим y_0 приращение Δy — любое, но такое, что $\Delta y \neq 0$ и точка $y_0 + \Delta y \in [c,d]$. Тогда $I(y_0) = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx$, $I(y_0+\Delta y) = \int\limits_a^b f(x,y_0+\Delta y)\,dx$,

$$\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}\,dx. \tag{1}$$

По теореме Лагранжа $f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0) = f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,\Delta y$ ($0 < \theta < 1$). Следовательно,

$$\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx. \tag{2}$$

Из (2) $\Rightarrow \dfrac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x,y_0)dx = \int\limits_a^b [f'_y(x,y_0+\theta\Delta y) -$

$- f'_y(x,y_0)]dx$. По условию $f'_y(x,y) \in C(\overline{P}) \Rightarrow f'_y(x,y)$ равномерно непрерывная в $(\overline{P})$ и, следовательно, любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (x',y'); (x'',y'') из $(\overline{P})$, для которых $|x''-x'| < \delta$; $|y''-y'| < \delta$, оказывается $|f'_y(x'',y'') - f'_y(x',y')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Положим $y' = y_0$; $y'' = y_0 + \theta\Delta y$, где Δy — любое, но такое, что $|\Delta y| < \delta$ ($\Rightarrow |\theta\Delta y| < \delta$); $x' = x'' = x$, где x — любое из $[a; b]$. Тогда $|x''-x'| = 0 < \delta$; $|y''-y'| = |\theta\Delta y| < \delta$ и, следовательно, $|f'_y(x,y_0+\theta\Delta y) - f'_y(x,y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ для любого $x \in [a;b]$.

Поэтому $\left|\dfrac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x,y_0)dx\right| \le \int\limits_a^b |f'_y(x,y_0+\theta\Delta y) -$

$- f'_y(x,y_0)|dx < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon$, если $|\Delta y| < \delta$.

А это означает, что $J'(y_0)$ существует, причем $I'(y_0) = \int\limits_a^b f'_y(x, y_0)\, dx$.

Так как y_0 — любое из $[c,d]$, то заключаем, что $I'(y)$ существует для любого y из $[c,d]$, причем $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\, dx$, $y \in [c,d]$. У нас $f'_y(x,y) \in C(\overline{P})$, а $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\, dx$. А тогда по теореме о непрерывности интеграла как функции параметра заключаем, что $I'(y) \in C([c,d])$. ◀

§5. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{P})$. Пусть $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\, dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $\int\limits_c^d I(y)\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$, т. е.

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx .$$

▶ Докажем более общее равенство

$$\int\limits_c^t I(y)\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\, dy \right) dx, \quad \text{для любого } t \in [c,d]. \qquad (1)$$

Займемся сначала левой частью равенства (1). Так как $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то $I(y) \in C([c,d])$ (см. теорему §3). Следовательно, $\int\limits_c^t I(y)\, dy$ — интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. А тогда по теореме Барроу

$$\left(\int\limits_c^t I(y)\, dy \right)'_t = I(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\, dx, \quad t \in [c,d]. \qquad (2)$$

Займемся теперь правой частью равенства (1). Положим

$$\int_c^t f(x,y)\,dy = \varphi(x,t). \tag{3}$$

Здесь в интеграле слева x выступает в роли параметра. Ясно, что функция $\varphi(x,t)$ определена в прямоугольнике $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le t \le d. \end{cases}$

Покажем, что $\varphi(x,t) \in C(\overline{P})$. Для этого выберем и закрепим любую точку $(x,t) \in (\overline{P})$. Затем возьмем Δx и Δt — любые, но такие, что точка $(x+\Delta x, t+\Delta t) \in (\overline{P})$. Будем иметь

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi(x,t) = \int_c^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy - \int_c^t f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_c^t [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]\,dy + \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy. \tag{4}$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2}$. Отметим, что $(\rho \to 0) \Leftrightarrow$ (одновременно $\Delta x, \Delta t \to 0$). Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$, $f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0 \\ (\Delta x \to 0)}]{} 0 \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что $|f(x+\Delta x, y) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$, если $\rho < \delta$. Тогда

$$\left| \int_c^t [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(t-c) \le \varepsilon,$$

если $\rho < \delta$. Последнее означает, что $\lim\limits_{\rho\to 0} \int_c^t [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]\,dy = 0$. Так как $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то $f(x,y)$ — ограниченная в $(\overline{P})$, т. е. существует число $M > 0$, такое, что $|f(x,y)| \le M$

в $(\overline{P})$. А тогда $\left|\int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy\right| \le M\cdot|\Delta t|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy \xrightarrow[(\Delta t\to 0)]{\rho\to 0} 0$. Теперь из (4) следует

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi(x,t) \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Последнее означает, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в точке (x,t). У нас точка (x,t) — любая из $(\overline{P})$. Поэтому $\varphi(x,t)\in C(\overline{P})$. Из (3) находим

$$\varphi_t'(x,t) = f(x,t). \qquad (5)$$

По условию, $f(x,y)\in C(\overline{P})$. Следовательно, $\varphi_t'(x,t)\in C(\overline{P})$. Принимая во внимание (3), правую часть равенства (1) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_a^b \varphi(x,t)\,dx. \qquad (6)$$

В интеграле, стоящем в правой части (6), t выступает в роли параметра. Выше было показано, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в $(\overline{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $\varphi_t'(x,t)$. Но тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x,t)\,dx\right)_t' = \int\limits_a^b \varphi_t'(x,t)\,dx \overset{(5)}{=} \int\limits_a^b f(x,t)\,dx, \quad t\in[c,d]. \qquad (7)$$

Видим, что левая и правая части равенства (1) имеют в промежутке $[c,d]$ совпадающие производные (см. (2) и (7)). Следовательно, они различаются в этом промежутке лишь на постоянную величину, т. е. для любого $t\in[c,d]$

$$\int\limits_c^t\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)dx + \text{const}. \qquad (8)$$

Положим в (8) $t=c$. Получим $0 = 0+\text{const}$ $\Rightarrow$ $\text{const} = 0$. Значит, будем иметь вместо (8) для любого $t\in[c,d]$

$$\int\limits_c^t\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy\right)dx. \qquad (9)$$

Положив в (9) $t = d$, получим

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx, \tag{10}$$

а это и требовалось установить. ◀

§6. Случаи, когда и пределы интеграла зависят от параметра

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $(\overline{D})$, ограниченной линиями: $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — функции, непрерывные на промежутке $[c,d]$ и такие, что $\alpha(y) \le \beta(y)$, $y \in [c,d]$.

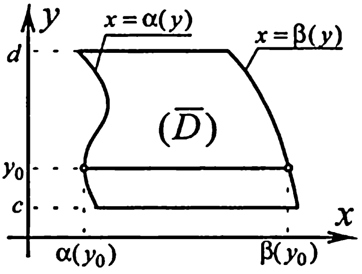


Рис. 7.3

Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$. Ясно, что каждому значению y из $[c,d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Станем обозначать

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]. \tag{1}$$

Теорема (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{D})$ и пусть $I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $I(y) \in C([c,d])$.

▶ Выберем и закрепим любое $y_0 \in [c,d]$.

1. Пусть $\alpha(y_0) < \beta(y_0)$.

Положим $\gamma = \dfrac{\alpha(y_0)+\beta(y_0)}{2}$. Ясно, что $\alpha(y_0) < \gamma < \beta(y_0) \Rightarrow \alpha(y_0)-\gamma < 0$, $\beta(y_0)-\gamma > 0$. Функции $\alpha(y)-\gamma$ и $\beta(y)-\gamma$ — непрерывные на промежутке $[c,d]$. Следовательно, по теореме о стабильности знака существует $\delta_1 > 0$, такое, что как только $|y-y_0| < \delta_1$ и $y \in [c,d]$, так сейчас же $\alpha(y)-\gamma < 0$, $\beta(y)-\gamma > 0$, т. е. $\alpha(y) < \gamma < \beta(y)$.

Возьмем y из промежутка $[c,d]$ любое, но такое, чтобы было $|y-y_0| < \delta_1$, и положим $p = \max\{\alpha(y),\alpha(y_0)\}$; $q = \min\{\beta(y_0),\beta(y)\}$. Ясно, что $p < q$. Имеем:

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx = \underline{\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x,y_0)\,dx} + \int\limits_{p}^{q} f(x,y_0)\,dx + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx},$$

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \underline{\int\limits_{\alpha(y)}^{p} f(x,y)\,dx} + \int\limits_{p}^{q} f(x,y)\,dx + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx}.$$

В этих соотношениях из четырех подчеркнутых интегралов два обязательно равны нулю (так как обязательно: либо $p = \alpha(y_0)$, либо $p = \alpha(y)$, и либо $q = \beta(y_0)$, либо $q = \beta(y)$).

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Так как $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны в точке y_0, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$, такое, что как только $|y-y_0| < \delta_2$ и $y \in [c,d]$, так сейчас же $|\alpha(y)-\alpha(y_0)| < \varepsilon$, $|\beta(y)-\beta(y_0)| < \varepsilon$. Отметим, что если брать на промежутке $[c,d]$ значения y, удовлетворяющие условию: $|y-y_0| < \min\{\delta_1,\delta_2\}$, то справедливы приведенные выше выражения для $I(y_0)$ и $I(y)$. Для таких y будем иметь

$$I(y)-I(y_0) = \int\limits_{p}^{q} [f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx +$$

$$+ \underline{\int\limits_{\alpha(y)}^{p} f(x,y)\,dx} + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx} - \underline{\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x,y_0)\,dx} - \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx}.$$

Рассмотрим, например, $\int\limits_{\alpha(y_0)}^{r} f(x,y_0)\,dx$. По условию $f(x,y)\in C(\overline{D})$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$, ограниченная в $(\overline{D})$, т. е. существует число $M>0$, такое, что $|f(x,y)|\le M$ всюду в $(\overline{D})$. Так как $y\in[c,d]$ и $|y-y_0|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, то $|p-\alpha(y_0)|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x,y_0)\,dx\right|\le M\cdot|p-\alpha(y_0)|<M\cdot\varepsilon .$$

Такая же оценка верна и для каждого из трех оставшихся подчеркнутых интегралов. Поэтому

$$|I(y)-I(y_0)|<\int\limits_{p}^{q}|f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx+2M\cdot\varepsilon .$$

Так как $(\overline{D})$ — ограниченное замкнутое множество и $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $f(x,y)$ равномерно непрерывная в $(\overline{D})$. А тогда взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta_3>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (x',y'), (x'',y'') из $(\overline{D})$, для которых $|x''-x'|<\delta_3$, $|y''-y'|<\delta_3$, будет $|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, $y'=y_0$, $y''=y$, где $y\in[c,d]$ и удовлетворяет условию $|y-y_0|<\delta$; $x'=x''=x$, где x — любое из $[p,q]$. Тогда $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ для всех $x\in[p,q]$. Следовательно, для y, удовлетворяющих условиям $|y-y_0|<\delta$ и $y\in[c,d]$, будет: $\int\limits_{p}^{q}|f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx<\varepsilon\cdot(q-p)$, и потому $|I(y)-I(y_0)|<\varepsilon(q-p+2M)$.

У нас функции $\alpha(y),\beta(y)\in C([c,d])$ $\Rightarrow$ $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — ограниченные в $[c,d]$ $\Rightarrow$ существует число $K>0$ такое, что $|\alpha(y)|\le K$, $|\beta(y)|\le K$ для всех $y\in[c,d]$. А тогда $|q-p|\le|q|+|p|\le 2K$. Значит,

$$|I(y)-I(y_0)|<2\varepsilon\cdot(K+M). \qquad (2)$$

Отметим, что число $2\varepsilon\cdot(K+M)$ сколь угодно мало вместе с ε.

Так как для достижения неравенства (2) понадобилось лишь, чтобы было $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$, то заключаем, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0.

2. Пусть $\alpha(y_0)=\beta(y_0)$.

В этом случае $I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=0$; $I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \Rightarrow$

$$|I(y)|\le M\cdot[\beta(y)-\alpha(y)]. \qquad (3)$$

Имеем $\lim\limits_{y\to y_0}[\beta(y)-\alpha(y)]=\beta(y_0)-\alpha(y_0)=0$. А тогда из (3) $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=0$ $[=I(y_0)]$. Видим, что и в этом случае установлена непрерывность $I(y)$ в точке y_0.

У нас y_0 — любое из $[c,d]$. Следовательно, $I(y)\in C([c,d])$. ◀

Теорема (о дифференцировании по параметру). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $(\overline{D})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$. Пусть функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ определены в промежутке $[c,d]$ и имеют там производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$. Пусть $I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Тогда для любого $y\in[c,d]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y). \qquad (4)$$

▶ Выберем и закрепим любое $y_0\in[c,d]$.

I. Пусть $\alpha(y_0)<\beta(y_0)$. При доказательстве предыдущей теоремы было отмечено, что в этом случае существует окрестность: $u_{\delta_1}(y_0)$ такая, что для любого $y\in u_{\delta_1}(y_0)$ будет $\alpha(y)<\gamma<\beta(y)$. Дадим y_0 приращение Δy — любое, но такое, что $\Delta y\ne 0$ и $y_0+\Delta y\in u_{\delta_1}(y_0)$. Будем иметь, следовательно, $\alpha(y_0+\Delta y)<\gamma<$ $<\beta(y_0+\Delta y)$. Положим $p=\max\{\alpha(y_0),\alpha(y_0+\Delta y)\}$; $q=\min\{\beta(y_0),$ $\beta(y_0+\Delta y)\}$. Могут реализоваться следующие случаи:

1) $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0)$;

2) $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0+\Delta y)$;

3) $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0)$;

4) $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0+\Delta y)$.

1. Рассмотрим случай, когда $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0)$. Имеем в этом случае

$$I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx, \qquad I(y_0+\Delta y)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx+\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx.$$

А тогда

$$I(y_0+\Delta y)-I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}\left[f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx.$$

По теореме Лагранжа $f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)=f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y$. По частному случаю теоремы о среднем для определенного интеграла

$$\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\left[\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\right],$$

где $c_1\in\left[\beta(y_0),\beta(y_0+\Delta y)\right] \;\Rightarrow\; c_1\to\beta(y_0)$, если $\Delta y\to 0$;

$$\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=f(c_2,y_0+\Delta y)\cdot\left[\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)\right],$$

где $c_2\in\left[\alpha(y_0),\alpha(y_0+\Delta y)\right] \;\Rightarrow\; c_2\to\alpha(y_0)$, если $\Delta y\to 0$. Следовательно,

$$\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx+$$

$$+ f(c_1, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} -$$

$$- f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, получаем

$$I'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\, dx + f\big(\beta(y_0), y_0\big) \cdot \beta'(y_0) - f\big(\alpha(y_0), y_0\big) \cdot \alpha'(y_0). \quad (5)$$

2. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0 + \Delta y)$.

В этом случае

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\, dx = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0)\, dx + \int\limits_{\beta(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\, dx;$$

$$I(y_0 + \Delta y) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx;$$

$$I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} \big[f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)\big] dx +$$

$$+ \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0)\, dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y) \cdot \Delta y \cdot dx +$$

$$+ f(c_1, y_0) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] - f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)\, dx +$$

$$+ f(c_1, y_0) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y \to 0$, находим

$$I'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx + f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0) - f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

3. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0+\Delta y)$, $q = \beta(y_0)$.
В этом случае

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} \big[f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)\big]dx +$$

$$+ \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y\cdot dx +$$

$$+ f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\big[\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)\big] - f(c_2,y_0)\cdot\big[\alpha(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)\big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx +$$

$$+ f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2,y_0)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y \to 0$, получим

$$I'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx + f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0) - f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

4. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0+\Delta y)$, $q = \beta(y_0+\Delta y)$.
В этом случае

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} \left[f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)\right]dx +$$

$$+ \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y\cdot dx +$$

$$+ f(c_1,y_0)\cdot\left[\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)\right] - f(c_2,y_0)\cdot\left[\alpha(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx +$$

$$+ f(c_1,y_0)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2,y_0)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y \to 0$, находим

$$I'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx + f(\beta(y_0),y_0)\cdot\beta'(y_0) - f(\alpha(y_0),y_0)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

II. Пусть $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$.

В этом случае $I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx = 0$ (как интеграл, у которого совпадают нижний и верхний пределы интегрирования);

$$I(y_0+\Delta y) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx.$$

А тогда

$$I(y_0+\Delta y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx =$$

$$= f(c,y_0+\Delta y)\cdot\left[\beta(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0+\Delta y)\right].$$

Здесь $\alpha(y_0+\Delta y)\le c\le\beta(y_0+\Delta y)\ \Rightarrow\ c\xrightarrow[\Delta y\to 0]{}\alpha(y_0)\ \ [=\beta(y_0)]$. Имеем

$$\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=$$

$$=f(c,y_0+\Delta y)\cdot\frac{\big(\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\big)-\big(\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)\big)}{\Delta y}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y\to 0$, находим

$$I'(y_0)=f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot[\beta'(y_0)-\alpha'(y_0)]=f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot[\beta'(y_0)-\alpha'(y_0)],$$

ибо $\alpha(y_0)=\beta(y_0)$. Последняя формула может быть записана также в виде

$$I'(y_0)=f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0)-f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \tag{6}$$

Легко видеть, что формула (6) является частным случаем формулы (5) (она получается из (5), если положить в (5) $\beta(y_0)=\alpha(y_0)$).

Так как у нас y_0 — любое, принадлежащее $[c,d]$, то приходим к выводу, что $I'(y)$ существует для любого $y\in[c,d]$ и что

$$I'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f'_y(x,y)\,dx+f\big(\beta(y),y\big)\cdot\beta'(y)-f\big(\alpha(y),y\big)\cdot\alpha'(y).\ \blacktriangleleft$$

§7. Примеры

Пример 1. Дано: $I(y)=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$. Найти $\lim\limits_{y\to 0}I(y)$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна на всей плоскости Oxy, то она непрерывна, в частности, в прямоугольнике $(\overline{P})=\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -d\le y\le d,\end{cases}$ где $d>0$ — любое конечное число. По теореме §2 заключаем, что допустим предельный переход по параметру под знаком интеграла, когда $y\to 0$. Имеем

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}-x\,dx + \int_{0}^{1}x\,dx = -\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Пример 2. Дано: $I(y) = \int\limits_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$. Найти $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Решение. Здесь подынтегральная функция $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Она непрерывна на всей плоскости Oxy. Функции $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = 1+y$ непрерывны для всех $y \in (-\infty,+\infty)$. Следовательно, в частности, $f(x,y)$ непрерывна в области $(\overline{D}) = \begin{cases} y \le x \le 1+y, \\ -d \le y \le d, \end{cases}$ где $d > 0$ — любое конечное число, а функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ непрерывны на промежутке $[-d,d]$. Видим, что выполнены условия теоремы о непрерывности интеграла как функции параметра (см. §6). По этой теореме $I(y) \in C([-d,d])$, а значит, $I(y)$ непрерывна в точке $y = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{y\to 0} I(y) = I(0)$, т. е.

$$\lim_{y\to 0}\int_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2} = \int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $(a > 0,\ b > 0)$, применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла.

Решение. Отметим прежде всего, что данный интеграл — несобственный, Подынтегральная функция имеет две особые точки. Это — точки $x = 0$ и $x = 1$. Имеем:

1) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x^b-x^a}{\ln x} = 0 \quad\Rightarrow$ подынтегральная функция в правой полуокрестности точки $x = 0$ — ограниченная;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{1/x}=\lim\limits_{x\to 1-0}(bx^b-ax^a)=b-a$ — определенное число $\Rightarrow$ подынтегральная функция в левой полуокрестности точки $x=1$ — ограниченная.

Положим

$$\tilde f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}, & x\in(0,1);\\ 0, & x=0;\\ b-a, & x=1.\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde f(x)\in C([0,1]) \Rightarrow \tilde f(x)\in R([0,1])$, а значит, данный интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ сходится.

Введем в рассмотрение интеграл $I(x)=\int\limits_a^b x^y dy$ $(a>0,\ b>0)$, $x\in[0,1]$. Этот интеграл представляет собой функцию параметра x, определенную в промежутке $[0,1]$. Здесь $f(x,y)=x^y$ определена и непрерывна в прямоугольнике $(\overline{P})=\begin{cases}a\le y\le b,\\ 0\le x\le 1.\end{cases}$ А тогда по теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §5) имеем

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_a^b x^y dy\right)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy.$$

Так как $I(x)=\int\limits_a^b x^y dy=\dfrac{x^y}{\ln x}\Bigg|_{y=a}^{y=b}=\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}$, то предыдущее равенство примет вид

$$\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int\limits_a^b\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}dy=\int\limits_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln(y+1)\Big|_{y=a}^{y=b}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

• ***Пример 4.*** Вычислить $I'(y)$, если $I(y) = \int\limits_{y}^{y^2} e^{-yx^2} dx$.

Решение. Здесь $f(x,y) = e^{-yx^2}$, $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = y^2$; $\alpha(y) \le \beta(y)$, если $y \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$; $\alpha(y) \ge \beta(y)$, если $y \in [0, 1]$. Пусть $d_1 > 0$ — любое конечное число; $d_2 > 1$ — любое конечное число. Введем в рассмотрение области

$$(\overline{D}_1) = \begin{cases} -d_1 \le y \le 0, \\ y \le x \le y^2; \end{cases} \qquad (\overline{D}_2) = \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y^2 \le x \le y; \end{cases} \qquad (\overline{D}_3) = \begin{cases} 1 \le y \le d_2, \\ y \le x \le y^2. \end{cases}$$

В каждой из этих трех областей $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную $f'_y(x,y) = -x^2 e^{-yx^2}$.

В каждом из промежутков $[-d_1, 0]$; $[0, 1]$; $[1, d_2]$ существуют $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, причем $\alpha'(y) = 1$, $\beta'(y) = 2y$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) заключаем, что для любого $y \in ([-d_1, 0] \cup [1, d_2])$ $I'(y)$ существует и $I'(y) = -\int\limits_{y}^{y^2} x^2 e^{-yx^2} dx + {}$ $+ e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}$.

Пусть теперь y — любое из промежутка $[0, 1]$. Имеем $I(y) = -\tilde{I}(y)$, где $\tilde{I}(y) = \int\limits_{y^2}^{y} e^{-yx^2} dx$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) для любого $y \in [0, 1]$ $\tilde{I}'(y)$ существует и $\tilde{I}'(y) = -\int\limits_{y^2}^{y} x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^3} - e^{-y^5} \cdot 2y$. Следовательно, для любого $y \in [0, 1]$ существует $I'(y)$, причем $I'(y) = -\tilde{I}'(y)$, т. е. $I'(y) = \int\limits_{y^2}^{y} x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \; I'(y) = -\int\limits_{y}^{y^2} x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}, \quad y \in [0, 1].$$

Глава 8

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Область и ее диаметр

Предварительно напомним некоторые сведения, относящиеся к понятию кривой на плоскости.

1. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — две функции, определенные и непрерывные на промежутке $[a,b]$, то множество точек плоскости $\{(\varphi(t),\psi(t))\}$, $t\in[a,b]$, называется *непрерывной кривой.*

2. Если $\varphi(a)=\varphi(b)$ и $\psi(a)=\psi(b)$, то непрерывная кривая называется *замкнутой.*

3. Замкнутая кривая называется *самонепересекающейся*, если две точки кривой $(\varphi(u),\psi(u))$ и $(\varphi(v),\psi(v))$ при $u<v$ могут совпасть лишь тогда, когда $u=a$, $v=b$.

4. Замкнутая самонепересекающаяся кривая (K) делит плоскость на два *связных* множества (D) и (G). (Любые две точки каждого их этих множеств можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей (K). Если же одна из этих точек принадлежит (D), а другая — принадлежит (G), то всякая соединяющая их непрерывная кривая пересекает (K).) Точки, лежащие на (K), не входят ни в (D), ни в (G). Одно из множеств (D), (G) является ограниченным, а другое — нет. То из этих двух множеств, которое является ограниченным, будем называть *областью*, ограниченной контуром (K). (У нас на рис. 8.1 (D) — область, ограниченная контуром (K).) Если к точками области (D) присоединить точки контура (K), то полученное множество будем называть *замкнутой областью*, ограниченной контуром

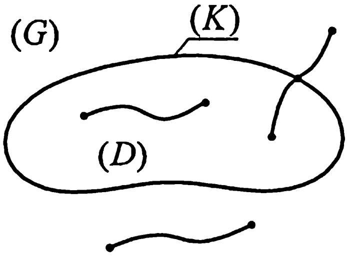


Рис. 8.1. К определению понятия области

(K), и обозначать через $(\overline{D})$. Отметим, что замкнутая область $(\overline{D})$ есть ограниченное замкнутое множество.

Определение. Пусть $(\overline{D})$ — замкнутая область, ограниченная контуром (K). Пусть M и N — любые две точки, лежащие на (K). Пусть $\rho(M,N)$ — расстояние между точками M и N. Число $d = \sup\limits_{\substack{M\in(K)\\ N\in(K)}} \{\rho(M,N)\}$ называется *диаметром* $(\overline{D})$.

Теорема. На контуре (K) существуют две точки M_0 и N_0, такие, что $\rho(M_0,N_0) = d$.

▶ Возьмем на контуре (K) точки M и N. Пусть $M = (\varphi(u),\psi(u))$, $N = (\varphi(v),\psi(v))$. Тогда $\rho(M,N) = \sqrt{[\varphi(v)-\varphi(u)]^2 + [\psi(v)-\psi(u)]^2}$. Видим, что $\rho(M,N)$ есть функция аргументов u, v, определенная в квадрате $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le u \le b, \\ a \le v \le b, \end{cases}$ и, очевидно, непрерывная в $(\overline{P})$. По второй теореме Вейерштрасса существует точка $(u_0, v_0) \in (\overline{P})$, в которой эта функция принимает свое наибольшее значение. Остается только положить $M_0 = (\varphi(u_0),\psi(u_0))$, $N_0 = (\varphi(v_0),\psi(v_0))$. ◀

В главе “Приложения определенного интеграла” было дано определение площади области $(\overline{D})$, установлено необходимое и достаточное условие квадрируемости этой области. Там же введено понятие простой кривой и доказана теорема о простой кривой. Следствием этой теоремы явилось утверждение, что область $(\overline{D})$, ограниченная простым контуром, квадрируема. Отметим здесь, что *теорема о простой кривой* допускает *обобщение*, а именно:

Обобщенная теорема о простой кривой. Пусть (L) — простая кривая, расположенная в области (D), ограниченной простым контуром (K). Разделим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть Q — сумма площадей тех

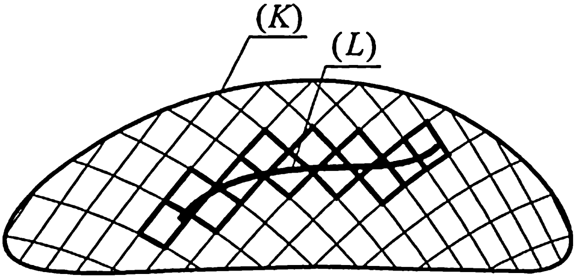


Рис. 8.2. К обобщенной теореме о простой кривой

частичных областей $(\overline{D}_k)$, которые имеют с (L) хотя бы одну общую точку. Тогда, если λ — наибольший из диаметров частичных областей $(\overline{D}_k)$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} Q = 0$.

§2. Определение двойного интеграла

Пусть функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной простым контуром (K). Проделаем следующие операции.

1. Дробим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на n частичных областей $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, ..., $(\overline{D}_n)$. Пусть площади этих частичных областей есть соответственно F_1, F_2, ..., F_n, а диаметры — $d_1, d_2, \dots, d_n$. Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{d_k\}$ (λ — ранг дробления).

2. В каждой частичной области $(\overline{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k) и находим в ней значение функции f, т. е. находим $f(x_k, y_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на площадь соответствующей частичной области $f(x_k, y_k)\cdot F_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot F_k.$$

Сумму σ будем называть *интегральной суммой Римана.* Отметим, что σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, так и от выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит ни от способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$, ни от выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, то его называют *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области $(\overline{D})$ и обозначают символом $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$ или $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \lim_{\lambda\to 0}\sigma \left(\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,F_k \right). \quad (1)$$

Замечание. Соотношение $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ означает: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, такое, что для любого способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы ни были при этом выбраны точки (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$.

Если у функции $f(x,y)$, определенной в $(\overline{D})$, существует $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$, то будем говорить, что $f(x,y)$ *интегрируема в* $(\overline{D})$, и писать $f(x,y) \in R(\overline{D})$ ($f(x,y)$ принадлежит классу R в области $(\overline{D})$).

Установим теперь необходимое условие интегрируемости функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$.

Теорема (об ограниченности функции $f(x,y)$, интегрируемой в $(\overline{D})$. Если функция $f(x,y) \in R(\overline{D})$, то $f(x,y)$ — ограниченная в области $(\overline{D})$.

▶ По условию $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Пусть $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$. Но тогда любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$. В частности, числу $\varepsilon = 1$ (> 0) будет отвечать $\tilde{\delta} > 0$, такое, что для любого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < 1$.

Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, и закрепим его. (Тогда F_k, $k = \overline{1, n}$, будут определенными числами.) Для такого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будем иметь $\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot F_k - I\right| < 1$.

Теперь выберем и закрепим точки (x_2, y_2), (x_3, y_3), , (x_n, y_n) соответственно в областях $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, ..., $(\overline{D}_n)$ (тогда $f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3)$, , $f(x_n, y_n)$ будут определенными числами). Точку (x_1, y_1) оставим свободной в $(\overline{D}_1)$ (т. е. точка (x_1, y_1) может занимать любое положение в области $(\overline{D}_1)$). Будем иметь при любом положении точки (x_1, y_1) в $(\overline{D}_1)$:

$$\left|f(x_1, y_1) \cdot F_1 + \sum_{k=2}^{n} f(x_k, y_k) \cdot F_k - I\right| < 1.$$

Положим $I - \sum_{k=2}^{n} f(x_k, y_k) \cdot F_k = C$ (C — определенное число, не зависящее от выбора точки (x_1, y_1)). Предыдущее неравенство запишется теперь так:

$$|f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C| < 1, \text{ точка } (x_1, y_1) \in (\overline{D}_1).$$

Имеем

$$f(x_1, y_1) \cdot F_1 = \big(f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C\big) + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |f(x_1, y_1) \cdot F_1| \le |f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C| + |C| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |f(x_1, y_1) \cdot F_1| < 1 + |C| \;\Rightarrow\; |f(x_1, y_1)| < \frac{1 + |C|}{F_1}.$$

Так как последнее неравенство верно для любого положения точки (x_1, y_1) в $(\overline{D}_1)$, то заключаем, что функция $f(x, y)$ — ограниченная в $(\overline{D}_1)$. Совершенно аналогично устанавливается ограниченность функции $f(x,y)$ в областях $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, ... , $(\overline{D}_n)$.

Положим

$$M_1 = \sup_{(\overline{D}_1)}\{|f(x,y)|\}, \quad M_2 = \sup_{(\overline{D}_2)}\{|f(x,y)|\}, \quad , \quad M_n = \sup_{(\overline{D}_n)}\{|f(x,y)|\}.$$

Пусть $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. Тогда $|f(x,y)| \le M$ для любой точки (x,y) из $(\overline{D})$. А это и означает, что $f(x,y)$ — ограниченная в $(\overline{D})$. ◀

Замечание. Доказанная теорема необратима, т. е. не всякая функция $f(x,y)$, заданная в $(\overline{D})$ и ограниченная там, оказывается интегрируемой в $(\overline{D})$. Следовательно, ограниченность функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$ является лишь необходимым условием интегрируемости этой функции в $(\overline{D})$.

§3. Признаки интегрируемости функций

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной простым контуром.

На вопрос, существует или не существует $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$, ответить, пользуясь непосредственным определением двойного интеграла, удается сравнительно легко лишь в отдельных частных случаях. В связи с этим оказывается важным установление признаков интегрируемости функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$. Но признаки интегрируемости $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ содержат понятия верхней и нижней сумм Дарбу. Поэтому необходимо ввести эти понятия.

Итак, пусть $f(x,y)$ — ограниченная функция, определенная в области $(\overline{D})$. Разложим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$, и положим $M_k = \sup\limits_{(\overline{D}_k)}\{f(x,y)\}$; $m_k = \inf\limits_{(\overline{D}_k)}\{f(x,y)\}$. Отметим, что числа m_k и M_k, $k = \overline{1,n}$, существуют, ибо множество $\{f(x,y)\}$, $(x,y) \in (\overline{D}_k)$ — ограниченное и сверху, и снизу. Составим суммы $s = \sum_{k=1}^{n} m_k F_k$ и $S = \sum_{k=1}^{n} M_k F_k$. Эти суммы называют соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*, отвечающими данному способу разбиения области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$.

Отметим, что для закрепленного способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ суммы s и S — определенные числа. Если же способ разбиения изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S. Отметим далее, что интегральные суммы Римана σ даже для закрепленного способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений (за счет различного выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$).

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами.

1. Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{D})$. Тогда для любой интегральной суммы Римана σ из $\{\sigma\}$ будет: $s \le \sigma \le S$.

2. Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{D})$. Тогда $s = \inf\{\sigma\}$, $S = \sup\{\sigma\}$.

3. Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие какому-нибудь способу дробления области $(\overline{D})$. Добавим теперь еще одну простую кривую дробления (все прежние кривые дробления сохраняются). В результате у нас получится некоторый новый способ дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу дробления области $(\overline{D})$. Справедливо утверждение, что $\tilde{S} \le S$, $\tilde{s} \ge s$, т. е. что от добавления новых кривых дробления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

4. Выше было отмечено, что для закрепленного способа дробления области $(\overline{D})$ нижняя и верхняя суммы Дарбу s и S суть определенные числа. Если же способ дробления области $(\overline{D})$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S. Следова-

тельно, как s, так и S принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений.

Пусть $\{s\}$ — множество значений, принимаемых нижней суммой Дарбу, $\{S\}$ — множество значений, принимаемых верхней суммой Дарбу. Справедливо утверждение.

Всякая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу, т. е. для всякой s из $\{s\}$ и для любой S из $\{S\}$ оказывается

$$s \le S .$$

Видим, что перечисленные здесь свойства сумм Дарбу являются дословным повторением аналогичных свойств сумм Дарбу, установленных для функций $f(x)$, заданных на промежутке $[a,b]$. Следует отметить, что и доказательства этих свойств совершенно аналогичны прежним.

Приступим теперь к установлению признаков интегрируемости.

Теорема 1 (основной признак интегрируемости). Пусть функция $f(x,y)$ — ограниченная, заданная в области $(\overline{D})$. Для того чтобы $f(x,y) \in R(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы было $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ (разности $S-s$ составляются каждый раз из чисел s и S, отвечающих одному и тому же способу дробления области $(\overline{D})$).

▶ *Необходимость.* Дано: $f(x,y) \in R(\overline{D})$, $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$. Доказать, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию $f(x,y) \in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, для каждой σ из множества $\{\sigma\}$, отвечающих этому способу разбиения, будет $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выберем и закрепим какой-нибудь способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{3}$, для любой σ из $\{\sigma\}$ (здесь $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$), или, что то же самое,

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma<I+\frac{\varepsilon}{3}, \quad \sigma\in\{\sigma\}. \tag{1}$$

1) Из соотношения (1) имеем, в частности, $\sigma<I+\frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma\in\{\sigma\} \Rightarrow \quad \Rightarrow I+\frac{\varepsilon}{3}$ — верхняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $S=\sup\{\sigma\}$. Поэтому

$$S\le I+\frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

(S — верхняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$).

2) Из соотношения (1) имеем также $\sigma>I-\frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma\in\{\sigma\} \Rightarrow$ $I-\frac{\varepsilon}{3}$ — нижняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $s=\inf\{\sigma\}$. Поэтому

$$s\ge I-\frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

(s — нижняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$).

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$0\le S-s\le\frac{2}{3}\varepsilon.$$

Тогда $0\le S-s<\varepsilon \Rightarrow |S-s|<\varepsilon$. Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\lambda<\delta$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to0}(S-s)=0.$$

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{\lambda\to0}(S-s)=0$. Доказать, что $f(x,y)\in R(\overline{D})$.

По условию, $\lim\limits_{\lambda\to0}(S-s)=0$. Это означает, что любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda<\delta$, оказывается $|S-s|<\varepsilon$, или $S-s<\varepsilon$ (так как $S-s\ge0$). Рассмотрим множества $\{s\}$ и $\{S\}$. Выберем и закрепим любую S из $\{S\}$. Обозначим ее через S_0. По свойству 4) сумм Дарбу, имеем $s \le S_0$, $s \in \{s\}$. Это означает, что $\{s\}$ ограничено сверху. Но тогда, как мы знаем, существует $\sup\{s\}$. Пусть $A = \sup\{s\}$ (A — определенное число). Ясно, что $s \le A$, $s \in \{s\}$. Ясно далее, что $A \le S_0$ (так как A — точная верхняя граница $\{s\}$, а S_0 — просто верхняя граница этого множества). У нас S_0 — любая из $\{S\}$. Следовательно, $A \le S$, $S \in \{S\}$. Таким образом, получили

$$s \le A \le S. \tag{4}$$

Отметим, что в соотношении (4) s и S могут отвечать как различным, так и одному и тому же способу разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. Пусть $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому способу разбиения $(\overline{D})$, а s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу. Одновременно будут иметь место соотношения

$$s \le \sigma \le S, \quad \sigma \in \{\sigma\}; \quad s \le A \le S.$$

Тогда $-(S - s) \le \sigma - A \le (S - s)$, $\sigma \in \{\sigma\}$ или $|\sigma - A| \le (S - s)$, $\sigma \in \{\sigma\}$.

Если брать любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части, у которого $\lambda < \delta$, то будет $S - s < \varepsilon$, а значит,

$$|\sigma - A| < \varepsilon, \quad \sigma \in \{\sigma\}.$$

Последнее означает, что $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma \Rightarrow f(x,y) \in R(\overline{D})$. ◀

Замечание. Имеем

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} M_k F_k - \sum_{k=1}^{n} m_k F_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) F_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k.$$

Здесь $\omega_k = M_k - m_k$ — колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D}_k)$. Теперь основной признак интегрируемости может быть сформулирован так.

Пусть функция $f(x,y)$ — ограниченная, заданная в области $(\overline{D})$. Для того чтобы $f(x,y) \in R(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало $\delta > 0$, такое, что для любого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, было бы

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k < \varepsilon.$$

Теорема 2. Если $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то $f(x,y) \in R(\overline{D})$ (т. е. если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{D})$, то $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ существует).

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию $f(x,y) \in C(\overline{D})$. Так как $(\overline{D})$ — ограниченное замкнутое множество, то по теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{D})$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, будет $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{F}$ одновременно для всех $k = \overline{1,n}$ (см. следствие из теоремы Кантора; здесь F — площадь области $(\overline{D})$). Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ $(k = \overline{1,n})$, у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь для такого способа разбиения $(\overline{D})$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{F} \cdot F_k = \frac{\varepsilon}{F} \sum_{k=1}^{n} F_k = \frac{\varepsilon}{F} \cdot F = \varepsilon.$$

Неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k F_k < \varepsilon$ получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Последнее означает, что $f(x,y) \in R(\overline{D})$. ◀

Теорема 3. Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$ и непрерывна там всюду, за исключением множества точек, лежащих на конечном числе простых кривых. Тогда $f(x,y) \in R(\overline{D})$.

▶ Пусть для определенности у функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ имеется лишь одна линия разрыва (L). Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По теореме о простой кривой линию (L) можно заключить внутрь многоугольной области (D_*), площадь которой меньше ε.

Контур (K_*) области (D_*) есть замкнутая ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. (L) и (K_*) не пересекаются.

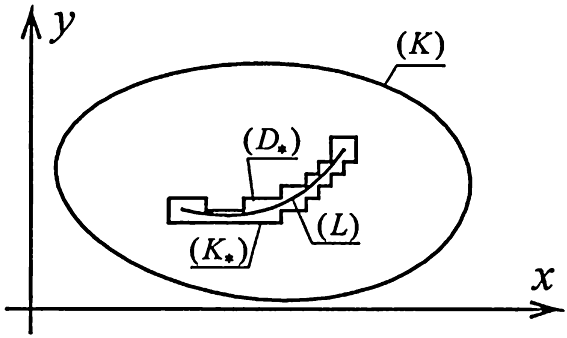


Рис. 8.3. К доказательству теоремы 3

Пусть $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ — область, остающаяся после удаления (D_*) из $(\overline{D})$. (Контур (K_*) причисляем к области $(\overline{D}) \setminus (D_*)$). Ясно, что $f(x,y)$ — непрерывна в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$.

Так как $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ — ограниченное замкнутое множество, то $f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых двух точек (x',y'); (x'',y'') из $(\overline{D}) \setminus (D_*)$, для которых $\rho\big((x',y');\ (x'',y'')\big) < \delta$ будет $|f(x'',y'') - f(x',y')| < \varepsilon$.

Контур (K_*) есть простая кривая. По обобщенной теореме о простой кривой, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$, такое, что для любого способа дробления, у которого $\lambda < \delta_2$, сумма площадей тех частичных областей, которые задевают (K_*), будет меньше ε.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Разобьем область $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$, так, чтобы оказалось $\lambda < \delta$, и составим разность сумм Дарбу $S - s = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \cdot F_k$.

Из областей $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, , $(\overline{D}_n)$ образуем три группы.

В группу I отнесем те из $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$, которые лежат в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ и не задевают контура (K_*).

В группу II отнесем те из $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$, которые лежат в (D_*) и не задевают контура (K_*).

В группу III отнесем те $(\overline{D}_k)$, которые задевают контур (K_*).

Тогда и сумма $\sum_{k=1}^{n}\omega_k F_k$ разобьется на три суммы $\sum_{\mathrm{I}}, \sum_{\mathrm{II}}, \sum_{\mathrm{III}}$. В сумме $\sum_{\mathrm{I}}$ будет $\omega_k < \varepsilon$, и поэтому $\sum_{\mathrm{I}}\omega_k F_k < \varepsilon\cdot F$. В суммах $\sum_{\mathrm{II}}$ и $\sum_{\mathrm{III}}$ будет $\omega_k \le \Omega$, где Ω — колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ (число Ω существует, ибо $f(x,y)$ — ограниченная в $(\overline{D})$). Так как суммы площадей областей $(\overline{D}_k)$, попавших в группу II и в группу III, меньше ε, то будем иметь:

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}}\omega_k F_k \le \Omega\cdot\sum\nolimits_{\mathrm{II}} F_k < \Omega\cdot\varepsilon,$$

$$\sum\nolimits_{\mathrm{III}}\omega_k F_k \le \Omega\cdot\sum\nolimits_{\mathrm{III}} F_k < \Omega\cdot\varepsilon.$$

А тогда

$$S - s = \sum_{k=1}^{n}\omega_k F_k < \varepsilon(F + 2\Omega) \tag{5}$$

(число $\varepsilon(F+2\Omega)$ сколь угодно мало вместе с ε).

Так как для достижения неравенства (5) нам потребовалось лишь чтобы было $\lambda < \delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$, а это означает, что $f(x,y)\in R(\overline{D})$.

§4 Свойства двойных интегралов

1°. $\iint\limits_{(\overline{D})} dF = F$ (F — площадь области $(\overline{D})$).

▶ В самом деле, здесь $f(x,y)\equiv 1$ всюду в $(\overline{D})$. Поэтому, взяв любое разбиение области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, $k=\overline{1,n}$, и выбрав произвольно точки (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будем иметь $f(x_1,y_1)=1$; $f(x_2,y_2)=1$, $f(x_3,y_3)=1$, , $f(x_n,y_n)=1$. Следовательно,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot F_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k = F \quad\Rightarrow\quad \lim_{\lambda\to 0}\sigma = F. \blacktriangleleft$$

2°. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и α — произвольное число, то $\alpha f(x,y)\in R(\overline{D})$, причем $\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF = \alpha\cdot\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$.

▶ Возьмем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ и составим интегральную сумму Римана для функции $\alpha f(x,y)$. Будем иметь

$$\sigma(\alpha f)=\sum_{k=1}^{n}\alpha f(x_k,y_k)F_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)F_k=\alpha\cdot\sigma(f).$$

По условию, $f(x,y)\in R(\overline{D})\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ существует, конечный и равный $\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)=\alpha\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)=\alpha\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF$, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)$ существует, конечный $\Rightarrow\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF$ существует, причем

$$\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF=\alpha\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF. ◀$$

3°. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $g(x,y)\in R(\overline{D})$, то $\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)\in\in R(\overline{D})$, причем

$$\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF=\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF\pm\iint\limits_{(\overline{D})}g(x,y)\,dF.$$

▶ Берем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ и составляем интегральную сумму Римана для функции $f(x,y)\pm g(x,y)$. Будем иметь

$$\sigma(f\pm g)=\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k,y_k)\pm g(x_k,y_k)\big)F_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)F_k\pm\sum_{k=1}^{n}g(x_k,y_k)F_k=\sigma(f)\pm\sigma(g).$$

По условию $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $g(x,y)\in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ существуют конечные $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(g)$. Но тогда существует конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)$, причем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)\pm\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(g)\Rightarrow$ $\Rightarrow\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF$ существует, причем $\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF=$ $=\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF\pm\iint\limits_{(\overline{D})}g(x,y)\,dF.$ ◀

4°. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Если изменить значения функции $f(x,y)$ вдоль какой-нибудь простой кривой (L) (с тем лишь условием, чтобы и измененная функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в $(\overline{D})$ и ее двойной интеграл по области $(\overline{D})$ равен $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$.

▶ Если составить интегральные суммы Римана для измененной и исходной функций, то они могут разниться лишь теми слагаемыми, которые относятся к областям $(\overline{D}_k)$, задевающим кривую (L). Но, по обобщенной теореме о простой кривой, общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$, откуда уже легко заключить, что обе интегральные суммы стремятся к общему пределу, т. е. к $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$.

Таким образом, существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. ◀

5°. Если область $(\overline{D})$, в которой задана функция $f(x,y)$, разложена простой кривой (L) на две области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$, то из интегрируемости функции $f(x,y)$ во всей области $(\overline{D})$ следует ее интегрируемость в областях $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$, и обратно — из интегрируемости функции $f(x,y)$ в обеих областях $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$ вытекает ее интегрируемость в области $(\overline{D})$. При этом

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_2)} f(x,y)\,dF. \tag{1}$$

▶ Разложим области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$ произвольными сетями простых кривых на части; тем самым и $(\overline{D})$ разложится на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, ..., $(\overline{D}_n)$. Если значком k' отметить частичные области, содержащиеся в $(\overline{D}_1)$, а значком k'' — частичные области, содержащиеся в $(\overline{D}_2)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k = \sum \omega_{k'} F_{k'} + \sum \omega_{k''} F_{k''}.$$

1) Пусть функция $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k F_k = 0$, а следовательно, и подавно $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\omega_{k'}F_{k'} = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\omega_{k''}F_{k''} = 0$. Последнее означает, что $f(x,y) \in R(\overline{D}_1)$ и $f(x,y) \in R(\overline{D}_2)$.

2) Пусть теперь дано, что функция $f(x,y) \in R(\overline{D}_1)$ и $f(x,y) \in R(\overline{D}_2)$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\omega_{k'}F_{k'} = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\omega_{k''}F_{k''} = 0$, а следовательно, и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\omega_k F_k = 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) \in R(\overline{D})$.

Однако нужно помнить, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k F_k$ построена не для произвольного разбиения области $(\overline{D})$ на части: ведь мы исходим из разложения порознь областей $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$. Чтобы от произвольного разложения области $(\overline{D})$ перейти к разложению рассмотренного частного вида, нужно присоединить к линиям деления кривую (L). Тогда соответствующие суммы будут разниться лишь слагаемыми, отвечающими тем частичным областям, которые задевают кривую (L). Но по обобщенной теореме о простой кривой общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$ и, следовательно, соответствующие суммы будут разниться на бесконечно малую величину. Значит, условие интегрируемости функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ будет выполнено.

Доказываемая формула (1) получается из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)F_k = \sum f(x_{k'},y_{k'})F_{k'} + \sum f(x_{k''},y_{k''})F_{k''}$$

переходом в нем к пределу при $\lambda \to 0$.

6°. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$ и $g(x,y) \in R(\overline{D})$ и пусть всюду в $(\overline{D})$ выполняется неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$. Тогда

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le \iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF.$$

▶ Произвольной сетью простых кривых разобьем $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. В каждой частичной области $(\overline{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k). Ясно, что $f(x_k, y_k) \le g(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, n}$. Умножим обе части этого неравенства на F_k ($F_k > 0$). Получим $f(x_k, y_k)F_k \le g(x_k, y_k)F_k$. Просуммируем полученные неравенства по значку k от 1 до n. Будем иметь $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)F_k \le$ $\le \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)F_k$. Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le \iint_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF. \blacktriangleleft$$

7°. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$ и пусть всюду в $(\overline{D})$: $m \le f(x,y) \le M$. Тогда $m \cdot F \le \iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le M \cdot F$.

$\blacktriangleright$ Это следует из свойств 6°, 2°, 1°. $\blacktriangleleft$

8°. Теорема о среднем значении. Пусть $f(x,y) \in R(\overline{D})$ и пусть всюду в $(\overline{D})$: $m \le f(x,y) \le M$. Тогда существует число μ, удовлетворяющее условию $m \le \mu \le M$, такое, что будет $\iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \mu \cdot F$.

$\blacktriangleright$ Выше (см. 7°) установлено, что в этом случае выполняется неравенство $mF \le \iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le MF$. Разделим все части этого неравенства на F ($F > 0$): $m \le \frac{1}{F} \iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le M$. Обозначим $\frac{1}{F} \iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \mu$ (ясно, что $m \le \mu \le M$). Тогда $\iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \mu \cdot F$, а это и требовалось установить. $\blacktriangleleft$

9°. Частный случай теоремы о среднем значении. Если функция $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то в $(\overline{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ, η), такая, что будет

$$\iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = f(\xi, \eta) \cdot F.$$

▶ По условию $f(x,y) \in C(\overline{D})$ $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $f(x,y)$ достигает в $(\overline{D})$ своего наименьшего m и наибольшего M значений. Так как $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Тогда по теореме о среднем значении $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \mu \cdot F$, где $m \le \mu \le M$.

Значения m и M функция $f(x,y)$ принимает в $(\overline{D})$. Если же $m < \mu < M$, то по теореме о промежуточном значении для функции $f(x,y) \in C(\overline{D})$ заключаем: в области $(\overline{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ,η), такая, что будет $f(\xi,\eta) = \mu$, а значит, и в этом случае

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = f(\xi,\eta) \cdot F. \blacktriangleleft$$

10°. Если функция $f(x,y) \in R(\overline{D})$, то и функция $|f(x,y)| \in R(\overline{D})$, причем $\left|\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF\right| \le \iint\limits_{(\overline{D})} |f(x,y)|\,dF$.

▶ По условию $f(x,y) \in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ — ограниченная в $(\overline{D})$, т. е. существует число $L > 0$, такое, что $|f(x,y)| \le L$ в $(\overline{D})$. Последнее означает, что функция $|f(x,y)|$ — ограниченная в $(\overline{D})$.

Следовательно, существуют $m = \inf\limits_{(\overline{D})}\{f(x,y)\}$, $M = \sup\limits_{(\overline{D})}\{f(x,y)\}$, $\tilde{m} = \inf\limits_{(\overline{D})}\{|f(x,y)|\}$, $\tilde{M} = \sup\limits_{(\overline{D})}\{|f(x,y)|\}$, а значит, существуют $\Omega = M - m$ и $\tilde{\Omega} = \tilde{M} - \tilde{m}$ (Ω — колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$, а $\tilde{\Omega}$ — колебание $|f(x,y)|$ в $(\overline{D})$). Легко понять, что $\tilde{\Omega} \le \Omega$.

Возьмем произвольное разбиение области $(\overline{D})$ сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1,n}$. Пусть ω_k — колебание $f(x,y)$ в $(\overline{D}_k)$, а $\tilde{\omega}_k$ — колебание $|f(x,y)|$ в $(\overline{D}_k)$. Имеем $0 \le \tilde{\omega}_k \le \omega_k$, $k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $0 \le \tilde{\omega}_k F_k \le \omega_k F_k$, $k = \overline{1,n}$. Следовательно,

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega}_k F_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k. \qquad (2)$$

Так как $f(x,y) \in R(\overline{D})$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k F_k = 0$. Тогда из (2) заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{\omega}_k F_k = 0$. Последнее означает, что $|f(x,y)| \in R(\overline{D})$. Имеем, далее,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) F_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k, y_k)| F_k,$$

т. е. $|\sigma(f)| \le \sigma(|f|)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\left|\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF\right| \le \iint\limits_{(\overline{D})} |f(x,y)|\,dF. \blacktriangleleft$$

§5. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в прямоугольнике $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$

1) Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$, т. е. при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию аргумента y, заданную на промежутке $[c,d]$. Станем обозначать $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \varphi(y)$, $y \in [c,d]$. Допустим теперь, что эта функция $\varphi(y) \in R([c,d])$. Тогда $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ называется *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$.

2) Допустим еще, что при каждом закрепленном x из $[a,b]$ существует $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Ясно, что каждому x из $[a,b]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение интеграла $\int_c^d f(x,y)\,dy$.

Следовательно, $\int_c^d f(x,y)\,dy$ представляет собой функцию аргумента x, определенную на промежутке $[a,b]$. Станем обозначать $\int_c^d f(x,y)\,dy = \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Допустим, что эта функция $\psi(x) \in R([a,b])$. Тогда $\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ называется еще одним *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$ и $I_{\text{повт.}} = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$, то они равны, т. е. $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$.

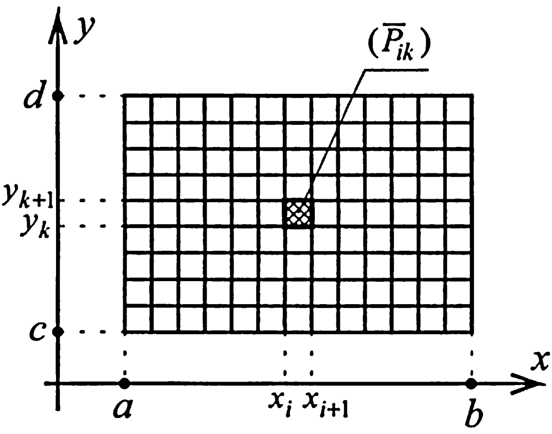


Рис. 8.4. К вычислению двойного интеграла в случае прямоугольной области

▶ Разобьем $(\overline{P})$ отрезками прямых $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n,$ $x_0 = a,\ x_n = b)$, $y = y_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots, m,\ y_0 = c,\ y_m = d)$, на частичные прямоугольники $(\overline{P}_{ik})$, где $(\overline{P}_{ik}) = \begin{cases} x_i \le x \le x_{i+1}, \\ y_k \le y \le y_{k+1}. \end{cases}$ Пусть

$m_{ik} = \inf\limits_{(\overline{P}_{ik})}\{f(x,y)\}$, $\quad M_{ik} = \sup\limits_{(\overline{P}_{ik})}\{f(x,y)\}$. Значит, если точка $(x,y) \in (\overline{P}_{ik})$, то

$$m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}. \tag{1}$$

Возьмем любое y из $[y_k, y_{k+1}]$ и закрепим его. Сделав это, проинтегрируем неравенство (1) по x от x_i до x_{i+1}. Получим

$$m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \le \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx \le M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \tag{2}$$

Интеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$ существует, так как существует по условию $I_{\text{повт.}}$, а это значит, что при любом закрепленном y из $[c,d]$ $f(x,y) \in R([a,b])$; тем более $f(x,y) \in R([x_i, x_{i+1}])$. Просуммируем неравенства (2) по значку i от 0 до $n-1$ (во всех этих неравенствах считаем y одним и тем же, взятым из $[y_k, y_{k+1}]$). Будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \le \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \tag{3}$$

Проинтегрируем неравенство (3) по y от y_k до y_{k+1}. Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k) \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k). \tag{4}$$

Просуммируем неравенства (4) по значку k от 0 до $m-1$. Будем иметь

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)}_{=F_{ik}}}_{=s} \le \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx \le$$

$$\le \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)}_{=F_{ik}}}_{=S} \quad \Leftrightarrow \quad s \le I_{\text{повт.}} \le S\,.$$

Так как $s \le I_{\text{дв.}} \le S$, то $-(S-s) \le I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} \le (S-s)$, т. е. $\left|I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}}\right| \le S - s$. По условию, $I_{\text{дв.}}$ существует $\Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$. Следовательно, $I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} = 0 \;\Rightarrow\; I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$. ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается.

Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, то $I_{\text{дв.}} = \widetilde{I}_{\text{повт.}}$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Пусть $\varphi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда функция $\varphi(y) \in C([c,d])$.

▶ Эта теорема была доказана ранее. (См. гл. 7, §3. О непрерывности интеграла как функции параметра.) ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается справедливость утверждения.

Пусть $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и пусть $\psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b]$. Тогда функция $\psi(x) \in C([a,b])$.

Следствие. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{P})$, то существуют $I_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

▶ Действительно, в этом случае $\varphi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\in C([c,d])$, а $\psi(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\in C([a,b])$. Следовательно, $\varphi(y)\in R([c,d])$; $\psi(x)\in R([a,b])$, т. е. $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy=I_{\text{повт.}}$ и $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx=\tilde{I}_{\text{повт.}}$ существуют. ◀

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x,y)\in C(\overline{P})$, то $f(x,y)\in R(\overline{P})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}}=\iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$.

Таким образом, приходим к **выводу**: если $f(x,y)\in C(\overline{P})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$, $I_{\text{повт.}}$, $\tilde{I}_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа, получаем, что $I_{\text{дв.}}=I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{5}$$

и $I_{\text{дв.}}=\tilde{I}_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{6}$$

Пример 1. Вычислить $I=\iint\limits_{(\overline{P})}\dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$, где $(\overline{P})=\begin{cases}3\le x\le 4,\\ 1\le y\le 2.\end{cases}$

▶ По формуле (5) имеем $\iint\limits_{(\overline{P})}\dfrac{dxdy}{(x+y)^2}=\int\limits_1^2 dy\int\limits_3^4\dfrac{dx}{(x+y)^2}$. Находим сначала внутренний интеграл:

$$\int\limits_3^4\frac{dx}{(x+y)^2}=-\frac{1}{x+y}\bigg|_{x=3}^{x=4}=\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}.$$

А тогда

$$\iint\limits_{(\overline{P})}\frac{dxdy}{(x+y)^2}=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}\right)dy=\ln\frac{y+3}{y+4}\bigg|_{y=1}^{y=2}=\ln\frac{5}{6}-\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{25}{24}.$$ ◀

Пример 2. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{P})} \frac{y\,dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где $(\overline{P}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

▶ Здесь для вычисления I удобнее воспользоваться формулой (6), т. е. взять внешнее интегрирование по x, а внутреннее — по y. Будем иметь $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. Находим внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

А тогда

$$I = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + \ln\sqrt{2} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если вычислять I по формуле (5), то квадратуры окажутся более сложными. В самом деле, будем иметь $I = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. Находим внутренний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+y^2}}.$$

А тогда

$$I = \int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

§6. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной линиями $y=c$, $y=d$ $(c<d)$ и $x=\alpha(y)$; $x=\beta(y)$, где $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — функции, непрерывные на промежутке $[c,d]$ и такие, что $\alpha(y)\le\beta(y)$, $y\in[c,d]$.

Определение. Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$. Тогда $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию аргумента y, определенную на промежутке $[c,d]$, т.е. $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \underset{\text{обозн.}}{=} \varphi(y)$, $y\in[c,d]$. Если эта функция $\varphi(y)$ оказывается интегрируемой на промежутке $[c,d]$, то $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ называется *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в области $(\overline{D})$, существуют одновременно оба интеграла: $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ и $I_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, то они равны, т.е. $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$

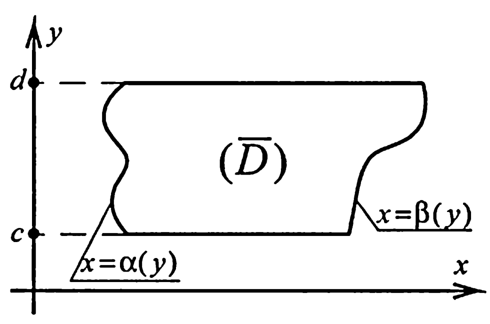


Рис. 8.5. К определению повторного интеграла от функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$

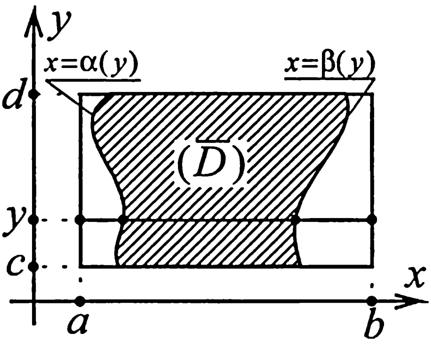


Рис. 8.6. К доказательству теоремы 1

▶ По условию $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — функции, непрерывные на $[c,d]$. Значит, они — ограниченные на $[c,d]$. Следовательно, найдутся числа a и b, такие, что будет $a < \alpha(y) \le \beta(y) < b$, $y \in [c,d]$.

Построим прямоугольник $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Ясно, что $(\overline{D}) \subset (\overline{P})$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(x,y)$, определив ее в прямоугольнике $(\overline{P})$ следующим образом:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{в } (\overline{D}), \\ 0 & \text{в } (\overline{P}) \setminus (\overline{D}). \end{cases}$$

Покажем, что у функции $g(x,y)$ в $(\overline{P})$ существуют оба интеграла:

$$I^{*}_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF \quad \text{и} \quad I^{*}_{\text{повт.}} = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} g(x,y)\,dx.$$

1) Действительно, $g(x,y) \in R(\overline{D})$, ибо в $(\overline{D})$ $g(x,y) \equiv f(x,y)$. Кроме того, $g(x,y) \in R\big((\overline{P}) \setminus (D)\big)$, ибо $g(x,y) = 0$ всюду в $(\overline{P}) \setminus (D)$, за исключением, быть может, множества точек, лежащих на двух простых кривых: $x = \alpha(y)$ и $x = \beta(y)$, $y = [c,d]$ (мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией

вдоль конечного числа простых кривых). Значит, $g(x,y) \in R(\overline{P})$, т. е. $I^*_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF$ существует. Имеем, далее,

$$I^*_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF + \underbrace{\iint\limits_{(\overline{P})\setminus(D)} g(x,y)\,dF}_{=0} =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF + 0 = I_{\text{дв.}}.$$

Итак, $I^*_{\text{дв.}}$ существует, и

$$I^*_{\text{дв.}} = I_{\text{дв.}}. \tag{1}$$

2) Покажем теперь, что у функции $g(x,y)$ в $(\overline{P})$ существует $I^*_{\text{повт.}}$. Для этого возьмем любое y из $[c,d]$ и закрепим его. Имеем

$$[a,b] = [a,\alpha(y)] \cup [\alpha(y),\beta(y)] \cup [\beta(y),b].$$

Функция $g(x,y)$ интегрируема по x на каждом из этих трех промежутков, ибо на $[\alpha(y),\beta(y)]$ она совпадает с $f(x,y)$, а на остальных двух — $g(x,y)=0$ всюду за исключением, быть может, двух точек. Имеем, далее,

$$\int\limits_a^b g(x,y)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^{\alpha(y)} g(x,y)\,dx}_{=0} + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x,y)\,dx + \underbrace{\int\limits_{\beta(y)}^{b} g(x,y)\,dx}_{=0} = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

По условию, правая часть последнего равенства интегрируема на промежутке $[c,d]$ (по условию, $I_{\text{повт.}}$ существует). Значит, интегрируема на промежутке $[c,d]$ и левая часть этого равенства, т. е. существует $I^*_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b g(x,y)\,dx$. Таким образом, показано, что $I^*_{\text{повт.}}$ существует и что

$$I^*_{\text{повт.}} = I_{\text{повт.}}. \tag{2}$$

Так как у ограниченной функции $g(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют оба интеграла $I^*_{\text{дв.}}$ и $I^*_{\text{повт.}}$, то по теореме 1 предыдущего параграфа заключаем, что

$$I^*_{\text{дв.}} = I^*_{\text{повт.}}. \tag{3}$$

У нас $I^*_{\text{дв.}} = I_{\text{дв.}}$, $I^*_{\text{повт.}} = I_{\text{повт.}}$. Следовательно, $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$. ◀

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{D})$ и пусть $\varphi(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $\varphi(y) \in C([c,d])$.

▶ Эта теорема была доказана ранее (см. гл. 7, §6, теорема о непрерывности интеграла как функции параметра). ◀

Следствие. Если функция $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то существует

$$I_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d \varphi(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то $f(x,y) \in R(\overline{D})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$. Таким образом, приходим к заключению: если $f(x,y) \in C(\overline{D})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$ и $I_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа приходим к выводу, что $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{4}$$

Замечание 1. Если область $(\overline{D})$ представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена кривыми $y = \tilde{\alpha}(x)$, $y = \tilde{\beta}(x)$, $x \in [a,b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (функции $\tilde{\alpha}(x)$ и $\tilde{\beta}(x)$ предполагаются непрерывными на промежутке $[a,b]$ и такими, что $\tilde{\alpha}(x) \le \tilde{\beta}(x)$, $x \in [a,b]$), то вместо формулы (4) придем к формуле

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\tilde{\alpha}(x)}^{\tilde{\beta}(x)} f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

При этом предполагается, что $f(x,y) \in C(\overline{D})$, а следовательно,

$I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\widetilde{\alpha}(x)}^{\widetilde{\beta}(x)} f(x,y)\,dy$ существуют.

Замечание 2. Если контур области $(\overline{D})$ пересекается лишь в двух точках как параллелями оси абсцисс, так и параллелями оси ординат (как, например, в случае, изображенном на рис. 8.8), то справедливы обе формулы (4) и (5). При этом, конечно, предполагается, что $f(x,y) \in C(\overline{D})$. Функции $\widetilde{\alpha}(x), \widetilde{\beta}(x) \in C([a,b])$, $\alpha(y), \beta(y) \in C([c,d])$.

Замечание 3. В случае более сложного контура область $(\overline{D})$ обычно разлагается на конечное число частей рассмотренного типа (например, на рис. 8.9 область $(\overline{D})$ рассекается прямой

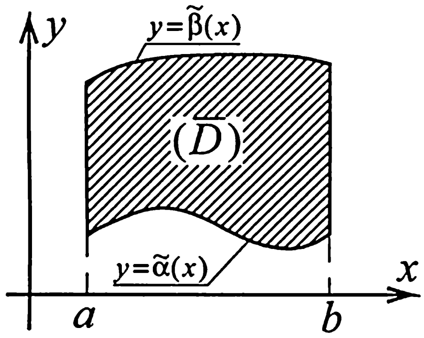


Рис. 8.7. К замечанию 1

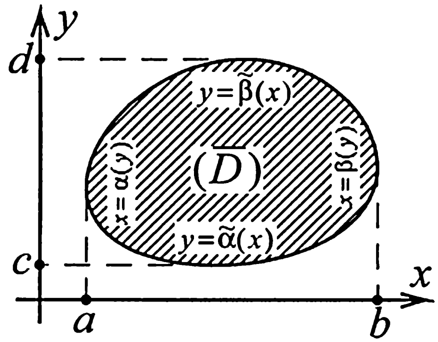


Рис. 8.8. К замечанию 2

$x = \gamma$ на три такие части: $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$). Тогда искомый двойной интеграл представляется суммой двойных интегралов, распространенных в отдельности на эти части:

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_2)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_3)} f(x,y)\,dF.$$

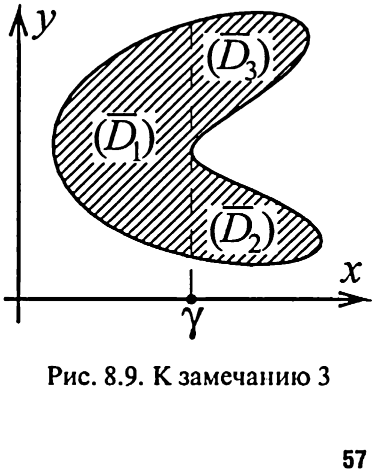


Рис. 8.9. К замечанию 3

§7. Примеры

Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} (x^2 + y)\, dxdy$, где $(\overline{D})$ — область, ограниченная двумя параболами: $y = x^2$ и $y^2 = x$.

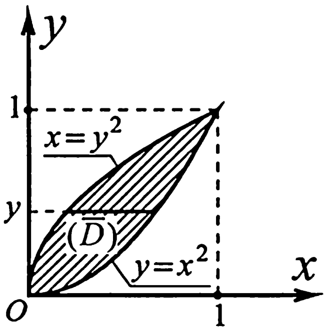


Рис. 8.10. К примеру 1

Решение. Полезно сделать чертеж (хотя бы грубо), чтобы получить общее представление об области. Решая совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения: $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Если внешнее интегрирование производить по y, то промежутком изменения y будет $[0, 1]$. Взяв произвольное значение y из промежутка $[0, 1]$, видим по рисунку, что x изменяется от $x = y^2$ до $x = \sqrt{y}$. Будем иметь, следовательно, $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y)\, dx$.

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + yx\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{3}y^{3/2} + y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3 = \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3\right) dy = \frac{33}{140}.$$

Пример 2. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, где $(\overline{D})$ — область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

Решение. Наносим все эти три линии на рисунок (рис. 8.11). Совместным решением уравнений легко получить, что прямая

$x = 2$ пересекает прямую $y = x$ в точке $(2, 2)$, а гиперболу $xy = 1$ — в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; прямая $y = x$ и гипербола $xy = 1$ (в пределах первого квадранта, где и лежит рассматриваемая область) пересекаются в точке $(1, 1)$.

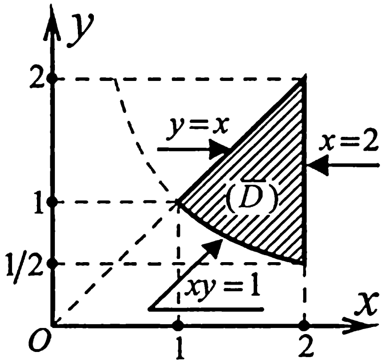


Рис. 8.11. К примеру 2

Если внешнее интегрирование производить по x, то промежуток изменения x будет $[1, 2]$. Взяв произвольное значение x из этого промежутка, видим по рисунку, что y изменяется от $y = \frac{1}{x}$ до $y = x$.

Будем иметь, следовательно, $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy$. Но $\int\limits_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy =$
$= -\frac{x^2}{y}\bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x$, так что $I = \int\limits_1^2 (x^3 - x)\, dx = \frac{9}{4}$.

В то время как в примере 1 вычисление двойного интеграла по обеим формулам (4) или (5) представлялось одинаково простым, в примере 2 дело обстоит иначе: вычисление по формуле (4) здесь было бы сложнее. Тем не менее мы выполним его, ибо поучительно дать себе отчет в причине указанного обстоятельства.

Прямая, параллельная оси Ox, пересекает контур области $(\overline{D})$ в двух точках, так что формула (4) применима. Но кривая, ограничивающая нашу область слева, состоит из двух частей: куска гиперболы и куска прямой, которые определяются различными уравнениями. Иными словами, функция $x = \alpha(y)$ задается различными формулами в различных частях промежутка $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ изменения y. Именно,

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{если} \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ y, & \text{если} \quad y \in [1, 2]. \end{cases}$$

Поэтому интегрирование по y следует разбить на два промежутка: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и $[1, 2]$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_{1/2}^{1} dy \int_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx + \int_{1}^{2} dy \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx.$$

Так как

$$\int_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}, \quad \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2}\Bigg|_{x=y}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

то

$$I = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}\right) dy + \int_{1}^{2} \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3}\right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

С подобными обстоятельствами приходится считаться: из двух возможных путей вычисления двойного интеграла, естественно, выбирают более простой.

Пример 3. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dxdy$, где $(\overline{D})$ — область, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

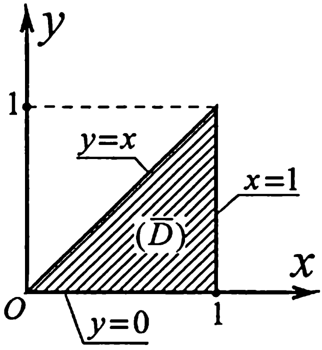


Рис. 8.12. К примеру 3

Если внешнее интегрирование производить по x, то промежуток изменения x будет $[0, 1]$. Взяв произвольное значение x из промежутка $[0, 1]$, видим по рисунку, что y изменяется от $y = 0$ до $y = x$. Будем иметь, следовательно, $I = \int_{0}^{1} dx \int_{y=0}^{y=x} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy$. Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{y=0}^{y=x} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy = \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) x^2.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$

В примере 3 вычисление I можно было вести и по формуле (4), т. е. производить внешнее интегрирование по y. Но в этом случае мы натолкнемся на более трудные квадратуры. Чтобы убедиться в этом, станем вычислять I по формуле (4). Имеем $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=y}^{x=1} \sqrt{4x^2 - y^2} dx$. Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x=y}^{x=1} \sqrt{4x^2 - y^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{4x^2 - y^2} - \frac{y^2}{2} \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 - y^2}\right) \right]_{x=y}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 - y^2} - \frac{y^2}{2} \ln\left(2 + \sqrt{4 - y^2}\right) - y^2\sqrt{3} + \frac{y^2}{2} \ln\left(2y + \sqrt{3}y\right) \right].$$

А тогда

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{4 - y^2} - \sqrt{3}y^2 + \frac{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} y^2 + \frac{y^2}{2} \ln \frac{y}{2 + \sqrt{4 - y^2}} \right] dy.$$

Сопоставляя это выражения для I с ранее полученным: $I = \int\limits_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2 dx$, видим, что вычисление I по формуле (5) предпочтительнее. Подобное обстоятельство следует учитывать при выборе формулы для вычисления двойного интеграла.

Для приобретения навыков в расстановке пределов интегрирования в случае криволинейной области полезны следующие упражнения.

Задача 1. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I = \int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{y=\frac{x^2}{4}-1}^{y=2-x} f(x,y)\, dy$.

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами: $-6 \le x \le 2$, $\frac{x^2}{4} - 1 \le y \le 2 - x$. Изобразим

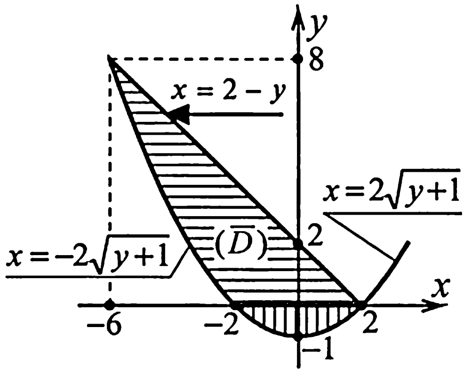


Рис. 8.13. К задаче 1

эту область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 8.13 видим, что если брать внешнее интегрирование по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить на две области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$ линией $y = 0$. Тогда $(\overline{D}_1)$ будет определяться неравенствами $-1 \le y \le 0$, $-2\sqrt{y+1} \le x \le 2\sqrt{y+1}$, а $(\overline{D}_2)$ — неравенствами $0 \le y \le 8$, $-2\sqrt{y+1} \le x \le 2-y$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2-y} f(x,y)\,dx\,.$$

Задача 2. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=1-x^2} f(x,y)\,dy\,.$$

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами

$$-1 \le x \le 1\,,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 1-x^2\,.$$

Изобразим область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 8.14 видим, что если внешнее интегрирование производить по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить линией $y = 0$ на две области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$. Область $(\overline{D}_1)$ определяется неравенствами $-1 \le y \le 0$, $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$,

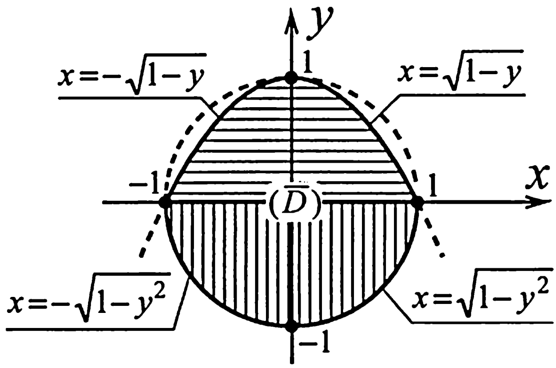


Рис. 8.14. К задаче 2

а область $(\overline{D}_2)$ — неравенствами $0 \le y \le 1$, $-\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{x=-\sqrt{1-y}}^{x=\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 3. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I = \int_{0}^{2a} dx \int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$ $(a > 0)$.

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами $0 \le x \le 2a$; $\sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}$. Изобразим область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 8.15 видим, что если внешнее интегрирование производить по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить линией $y = a$ на три области: $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$.

Область $(\overline{D}_1)$ определяется неравенствами

$$0 \le y \le a, \quad \frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2 - y^2};$$

область $(\overline{D}_2)$ — неравенствами

$$0 \le y \le a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le 2a;$$

область $(\overline{D}_3)$ — неравенствами

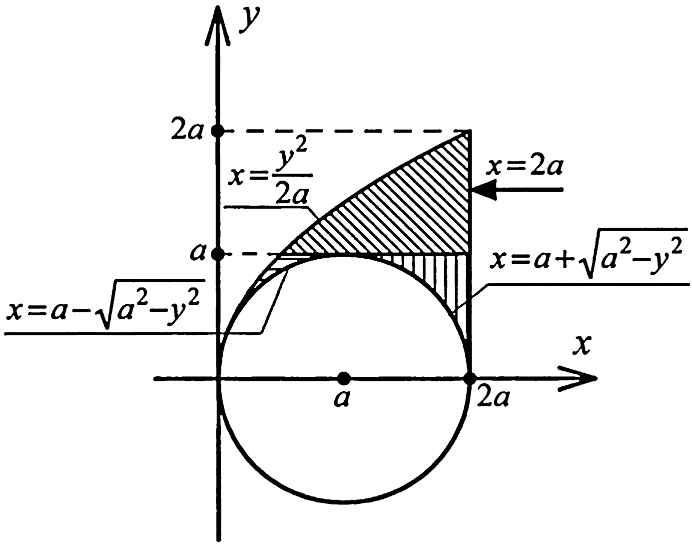


Рис. 8.15. К задачс 3

$$a \le y \le 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a\,.$$

Следовательно, будем иметь

$$I = \int\limits_0^a dy \int\limits_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{x=a+\sqrt{a^2-y^2}}^{x=2a} f(x,y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=2a} f(x,y)\,dx\,.$$

Задача 4. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} |\cos(x+y)|\,dxdy$, где $(\overline{D}) =$
$$= \begin{cases} 0 \le x \le \pi, \\ 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Отметим прежде всего, что $\cos(x+y) \ge 0$ в областях:

$$(\overline{D}_1) = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x\right\} \text{ и } (\overline{D}_4) = \left\{\frac{\pi}{2} \le x \le \pi;\ \frac{3\pi}{2} - x \le y \le \pi\right\}.$$

$\cos(x+y) \le 0$ в областях:

$$(\overline{D}_2) = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} - x \le y \le \pi\right\} \text{ и } (\overline{D}_3) = \left\{\frac{\pi}{2} \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \frac{3\pi}{2} - x\right\}.$$

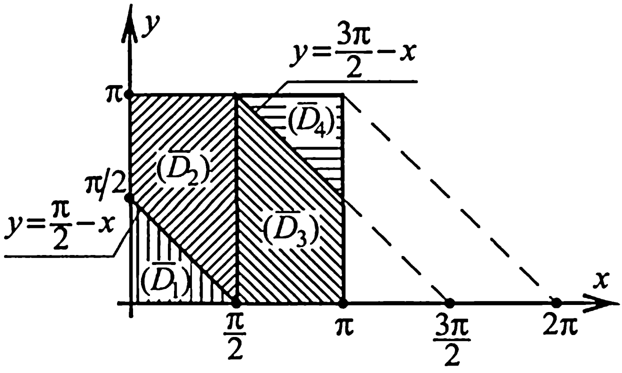


Рис. 8.16. К задаче 4

Имеем поэтому

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})} |\cos(x+y)|\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} \cos(x+y)\,dxdy - \iint\limits_{(\overline{D}_2)} \cos(x+y)\,dxdy -$$

$$- \iint\limits_{(\overline{D}_3)} \cos(x+y)\,dxdy + \iint\limits_{(\overline{D}_4)} \cos(x+y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_{y=0}^{y=\pi/2-x} \cos(x+y)\,dy - \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_{y=\pi/2-x}^{y=\pi} \cos(x+y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{y=0}^{y=3\pi/2-x} \cos(x+y)\,dy + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{y=3\pi/2-x}^{y=\pi} \cos(x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x} dx - \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\Big|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi} dx -$$

$$- \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{3\pi}{2}-x} dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin(x+y)\Big|_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} (1+\sin x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1+\sin x)\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1-\sin x)\,dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} dx + 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx = \pi + \pi = 2\pi\,.$$

Задача 5. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dxdy$, где $(\overline{D}) = \left\{x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

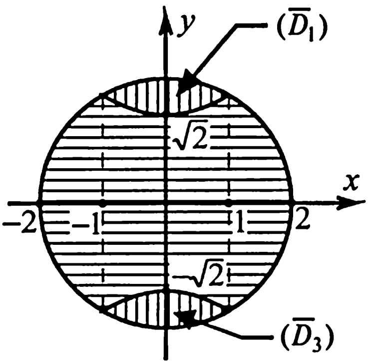


Рис. 8.17. К задаче 5

Решение.

$$x^2 - y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Ветви этой гиперболы являются линиями разрыва подынтегральной функции. Так как подынтегральная функция — ограниченная в $(\overline{D})$ и непрерывная там всюду, за исключением точек, лежащих на двух простых кривых, то двойной интеграл I существует.

Пусть

$$(\overline{D}_1) = \left\{-1 \le x \le 1;\ \sqrt{x^2 + 2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\right\},$$

$$(\overline{D}_3) = \left\{-1 \le x \le 1;\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le -\sqrt{x^2 + 2}\right\},$$

$$(\overline{D}_2) = \left\{-2 \le x \le -1;\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{-1 \le x \le 1;\ -\sqrt{x^2 + 2} \le y \le \sqrt{x^2 + 2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{1 \le x \le 2;\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

Имеем в $(D_1) \cup (D_3)$: $x^2 - y^2 + 2 < 0$, а в (D_2): $x^2 - y^2 + 2 > 0$. Мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. Поэтому

$$I = \iint\limits_{(\overline{D}_2)} dxdy - \iint\limits_{(\overline{D}_1)} dxdy - \iint\limits_{(\overline{D}_3)} dxdy = F_{\overline{D}_2} - F_{\overline{D}_1} - F_{\overline{D}_3},$$

где $F_{\overline{D}_1}$, $F_{\overline{D}_2}$, $F_{\overline{D}_3}$ — площади областей $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$. Так как $F_{(\overline{D})} = 4\pi$, $F_{(\overline{D}_3)} = F_{(\overline{D}_1)}$, то $F_{(\overline{D}_2)} = 4\pi - 2F_{(\overline{D}_1)}$ и, следовательно,

$I = 4\pi - 4F_{(\overline{D}_1)}$. Так как область $(\overline{D}_1)$ симметрична относительно оси Oy, то

$$F_{(\overline{D}_1)} = 2\int_0^1 dx \int_{y=\sqrt{x^2+2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy = 2\int_0^1 \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2}\right)dx =$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2+2} - \frac{2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(1+\sqrt{3}\right) + \ln\sqrt{2}\right] = \frac{2\pi}{3} + 2\ln\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

А тогда

$$I = 4\pi - \frac{8\pi}{3} - 8\ln\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + 4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Задача 6. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{\mathrm{E}(y-x^2)}\,dxdy$, где $(\overline{D}) = \left\{x^2 \le y \le 4\right\}$.

Решение. По определению функции E, имеем:

если $0 \le y - x^2 < 1$, т. е. если $x^2 \le y < 1 + x^2$, то $\mathrm{E}(y - x^2) = 0$;

если $1 \le y - x^2 < 2$, т. е. если $1 + x^2 \le y < 2 + x^2$, то $\mathrm{E}(y - x^2) = 1$;

если $2 \le y - x^2 < 3$, т. е. если $2 + x^2 \le y < 3 + x^2$, то $\mathrm{E}(y - x^2) = 2$;

если $3 \le y - x^2 < 4$, т. е. если $3 + x^2 \le y < 4 + x^2$, то $\mathrm{E}(y - x^2) = 3$.

Следовательно, $\mathrm{E}(y - x^2) = 0$ в (D_1); $\mathrm{E}(y - x^2) = 1$ в (D_2); $\mathrm{E}(y - x^2) = 2$ в (D_3); $\mathrm{E}(y - x^2) = 3$ в (D_4). Видим, что подынтегральная функция терпит разрыв на конечном числе простых кривых, лежащих в области $(\overline{D})$. В остальных точках области $(\overline{D})$ она непрерывная. Так как подынтегральная функция еще и ограниченная в $(\overline{D})$, то двойной интеграл I существует. Принимая во внимание, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых, можем написать, что

$$I = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} 0 \cdot dxdy + \iint\limits_{(\overline{D}_2)} 1 \cdot dxdy + \iint\limits_{(\overline{D}_3)} \sqrt{2}\,dxdy + \iint\limits_{(\overline{D}_4)} \sqrt{3}\,dxdy \quad \Rightarrow$$

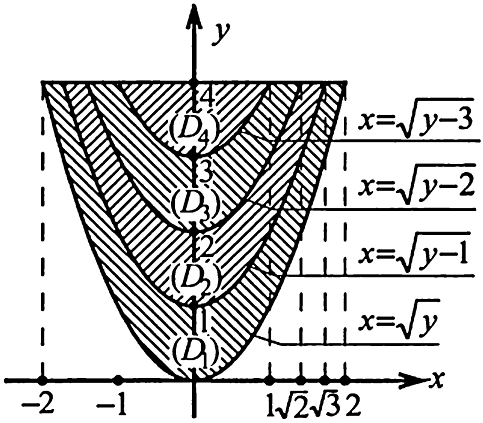


Рис. 8.18. К задаче 6

$\Rightarrow\ I = F_{\overline{D}_2} + \sqrt{2}\cdot F_{\overline{D}_3} + \sqrt{3}\cdot F_{\overline{D}_4}$, где $F_{\overline{D}_2}$, $F_{\overline{D}_3}$, $F_{\overline{D}_4}$ — площади областей $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, $(\overline{D}_4)$ соответственно. Так как области $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, $(\overline{D}_4)$ симметричны относительно оси Oy, то

$$F_{\overline{D}_4} = 2\int\limits_3^4 dy \int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-3}} dx = 2\int\limits_3^4 \sqrt{y-3}\,dy = 2\cdot\frac{2}{3}(y-3)^{3/2}\Big|_{y=3}^{y=4} = \frac{4}{3};$$

$$F_{\overline{D}_3} = 2\int\limits_2^4 dy \int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-2}} dx - F_{D_4} = 2\int\limits_2^4 \sqrt{y-2}\,dy - \frac{4}{3} =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}(y-2)^{3/2}\Big|_{y=2}^{y=4} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right);$$

$$F_{\overline{D}_2} = 2\int\limits_1^4 dy \int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-1}} dx - \left(F_{\overline{D}_3} + F_{\overline{D}_4}\right) = 2\int\limits_1^4 \sqrt{y-1}\,dy - \frac{8\sqrt{2}}{3} =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}(y-1)^{3/2}\Big|_{y=1}^{y=4} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

А тогда

$$I = \left(4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) + \sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\left(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4\right).$$

Глава 9

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Криволинейные интегралы первого рода

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу.

Имеется спрямляемая пространственная кривая (l) длины s. Пусть на (l) непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине. Плотность $\rho(x,y,z)$ кривой (l) в точке (x,y,z) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку.) Требуется найти массу m кривой (l).

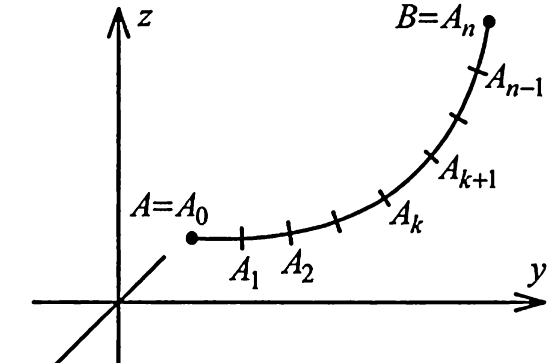


Рис. 9.1. К задаче по определению массы кривой

▶ Разбиваем кривую (l) точками $A_0 = A$, A_1, A_2, , A_{n-1}, $A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) с длинами s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}. Полагаем $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}}\{s_k\}$. Предполагаем частичные дуги $A_k A_{k+1}$ столь малыми, что на $\smile A_k A_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$, где точка $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ — любая, принадлежащая $\smile A_k A_{k+1}$. Тогда масса Δm_k частичной дуги $A_k A_{k+1}$ привой (l) будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k = \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k .$$

Масса m всей кривой (l) будет выражаться приближенно суммой

$$m \approx \rho(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \cdot s_0 + \rho(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \cdot s_1 + \dots + \rho(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) \cdot s_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k .$$

Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги $A_k A_{k+1}$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу $A_k A_{k+1}$ однородной. Поэтому за массу m кривой (l) естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k . \blacktriangleleft$$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть в пространстве расположена спрямляемая кривая (l), имеющая концы в точках A и B, и пусть во всех точках кривой (l) определена функция $f(x, y, z)$. Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую (l) точками $A_0 = A$, A_1, A_2, , A_{n-1}, $A_n = B$, следующими друг за другом вдоль кривой (l) в направлении от A к B, на частичные дуги $\smile A_k A_{k+1}$. Пусть s_k — длина $\smile A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}}\{s_k\}$ (λ — ранг дробления).

2. На каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение функции f, т. е. находим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k .$$

Отметим, что значение суммы σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, так и от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, ни от способа выбора точек $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то его называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой (l) и обозначают символом

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, ds . \tag{1}$$

Если, в частности, кривая (l) лежит в плоскости Oxy, то функция f от координаты z не зависит и вместо (1) появляется интеграл

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\, ds . \tag{2}$$

Замечание 1. Из самого определения криволинейного интеграла первого рода вытекает следующее свойство:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{\smile BA} f(x, y, z)\, ds ,$$

т. е. направление, которое может быть придано пути интегрирования, никакой роли не играет. В самом деле, ведь длина s_k дуги $\smile A_k A_{k+1}$ не зависит от того, какая из точек A_k и A_{k+1} принята за начало и какая — за конец дуги.

Замечание 2. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой (l) определяется по формуле

$$m = \int\limits_{\smile AB} \rho(x, y, z)\, ds .$$

3°. Теорема (о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по плоской кривой).

1. Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$,

где φ и ψ — функции, заданные на промежутке $[p,q]$ и имеющие там непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Пусть $(\varphi(p), \psi(p)) = A$, $(\varphi(q), \psi(q)) = B$. Пусть точки $(\varphi(t), \psi(t))$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p,q]$. (Считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек.)

2. Пусть функция $f(x,y)$ задана на $\smile AB$ и непрерывна там.

Тогда $I = \int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{p}^{q} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \quad (p < q) \quad (3)$$

(подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла (3) должен быть меньше верхнего).

▶ Заметим сначала, что интеграл, стоящий в правой части (3), существует, ибо подынтегральная функция в нем непрерывна на промежутке $[p,q]$.

Напомним, что в условиях теоремы кривая $\smile AB$ спрямляема и ее длина $s = \int\limits_{p}^{q} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ $(p < q)$. Составим сумму Римана σ для криволинейного интеграла $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$. Для этого надо разбить $\smile AB$ точками A_k на дуги $A_k A_{k+1}$ $(k = \overline{0, n-1})$. Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[p,q]$ произвольным образом точками $p = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = q$ и положить $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $k = \overline{0, n}$. Тогда

$$s_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4)$$

Затем на каждой частичной дуге $\smile A_k A_{k+1}$ нужно взять произвольную точку $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$. Будем иметь тогда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла (4)

$$s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot (t_{k+1} - t_k),$$

где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Поэтому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) \cdot \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

Полученное выражение для σ сходно с суммой Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), но таковой не является, так как θ_k и τ_k, вообще говоря, различны.

Составим сумму

$$\sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

Это уже настоящая сумма Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), т. е. для интеграла

$$I_* = \int_p^q f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

Было отмечено, что I_* существует. Следовательно, $\sigma_* \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ ($\lambda_* = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \{\Delta t_k\}$). Заметим, что $(\lambda \to 0) \Leftrightarrow (\lambda_* \to 0)$.

Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \tag{5}$$

Из (5) видно, что теорема будет доказана, если показать, что $\lim\limits_{\lambda_* \to 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$.

Имеем

$$\sigma - \sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \right] \cdot s_k .$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Функция $f(\varphi(t), \psi(t)) \in C([p,q])$, как суперпозиция непрерывных функций. Значит, она и равномерно непрерывна на промежутке $[p,q]$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[p,q]$, для которых $|t'' - t'| < \delta$, будет

$$\left| f(\varphi(t''), \psi(t'')) - f(\varphi(t'), \psi(t')) \right| < \varepsilon .$$

Возьмем любое разбиение промежутка $[p,q]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$, у которого ранг дробления $\lambda_* < \delta$. Так как θ_k и $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, то $|\theta_k - \tau_k| \le t_{k+1} - t_k \le \lambda_* < \delta$. Следовательно, для любого $k = \overline{0, n-1}$ будем иметь

$$\left| f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \right| < \varepsilon .$$

Поэтому, считая дробление промежутка $[p,q]$ таким, что $\lambda_* < \delta$, получим $|\sigma - \sigma_*| < \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \cdot s_k = \varepsilon \cdot s$ (здесь s — длина $\smile AB$). Так как для достижения неравенства $|\sigma - \sigma_*| < \varepsilon \cdot s$ потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_* < \delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda_* \to 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$, а значит, и $\lim\limits_{\lambda \to 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$. ◀

Частные случаи.

I. Пусть кривая $\smile AB$ дана явным уравнением: $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, $a < b$. Тогда:

1) если функция $\varphi(x)$ имеет на промежутке $[a,b]$ непрерывную производную $\varphi'(x)$ и

2) если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\, ds$ существует, и

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx .$$

II. Пусть $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. Тогда:

1) если функция $r(\varphi)$ имеет на промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$ и

2) если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$ существует, и

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Замечание. Совершенно аналогично доказывается теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по пространственной кривой.

Теорема.

1. Пусть пространственная кривая $\smile AB$ задана уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [p, q] \text{ и } p < q \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

(считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек).

2. Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют на промежутке $[p, q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

3. Пусть $(\varphi(p), \psi(p), \omega(p)) = A$, $(\varphi(q), \psi(q), \omega(q)) = B$ и точки $(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p, q]$.

Тогда, если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на $\smile AB$, то $I = \int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,ds$ существует и выражается через обыкновенный определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,ds =$$

$$= \int\limits_{p}^{q} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2}\,dt \quad (p < q).$$

Примеры.

1. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} (x^{4/3} + y^{4/3})\, ds$, где (l) — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Решение. Вычисление I удобнее производить, взяв уравнение астроиды (l) в параметрической форме:

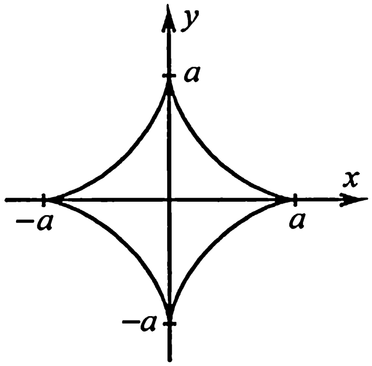


Рис. 9.2. К примеру 1

$$(l) = \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Имеем $x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$; $y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$;

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} \cdot dt = 3a\left|\sin t\cos t\right| dt.$$

Поэтому

$$I = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\cdot 3a\left|\sin t\cos t\right| dt =$$

$$= 3a^{7/3}\left[\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)\,dt - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)\,dt - \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I = \frac{1}{2}a^{7/3}\left[(-\cos^6 t + \sin^6 t)\Big|_0^{\pi/2} + (\cos^6 t - \sin^6 t)\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + (-\cos^6 t + \sin^6 t)\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + (\cos^6 t - \sin^6 t)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{a^{7/3}}{2}[2 + 2 + 2 + 2] = 4a^{7/3}.$$

2. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} |y|\, ds$, где (l) — дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

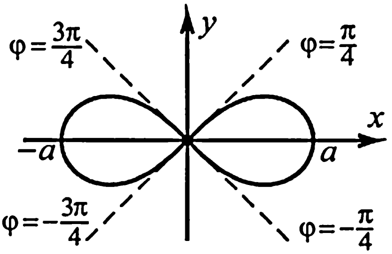


Рис. 9.3. К примеру 2

Решение. Перейдем к полярным координатам: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда уравнение лемнискаты получим в виде: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Имеем $r'_\varphi = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; $r^2 + (r'_\varphi)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$; $ds = \sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}\, d\varphi = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$;

$|y| = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot|\sin\varphi|$, $|y|\, ds = a^2|\sin\varphi|\, d\varphi$. Поэтому

$$I = a^2\left[\int\limits_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi - \int\limits_{-\pi}^{-3\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi - \int\limits_{-\pi/4}^{0}\sin\varphi\, d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left[-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} - \cos\varphi\Big|_{3\pi/4}^{\pi} + \cos\varphi\Big|_{-\pi}^{-3\pi/4} + \cos\varphi\Big|_{-\pi/4}^{0}\right] = a^2\cdot\left(4-2\sqrt{2}\right).$$

3. Вычислить $I = \int\limits_{(l)}(x+y)\, ds$, где (l) — контур треугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Решение. $(l) = (l_1)\cup(l_2)\cup(l_3)$;

$$I = \int\limits_{(l)}(x+y)\, ds = \int\limits_{(l_1)}(x+y)\, ds + \int\limits_{(l_2)}(x+y)\, ds + \int\limits_{(l_3)}(x+y)\, ds.$$

1) $(l_1) = OA$: $y = 0$, $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$

$$ds = \sqrt{1+(y'_x)^2}dx = dx;$$

$$I_1 = \int\limits_{(l_1)}(x+y)\, ds = \int\limits_0^1(x+0)\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

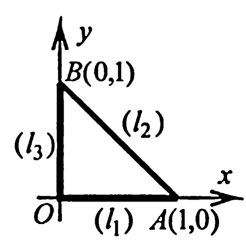


Рис. 9.4.
К примеру 3

2) $(l_2) = AB$: $y = 1-x$, $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$

$$ds = \sqrt{1+(y'_x)^2}dx = \sqrt{2}\, dx;$$

$$I_2 = \int\limits_{(l_2)} (x+y)\,ds = \int\limits_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,x\Big|_0^1 = \sqrt{2}.$$

3) $(l_3) = OB: \ x = 0; \ y \in [0, 1] \ \Rightarrow \ ds = \sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy = dy;$

$$I_3 = \int\limits_{(l_3)} (x+y)\,ds = \int\limits_0^1 (0+y)\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

4. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} z\,ds$, где (l) — коническая винтовая линия:

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \qquad t \in [0, t_0]. \\ z = t, \end{cases}$$

Решение. Имеем: $x'_t = \cos t - t\sin t$; $y'_t = \sin t + t\cos t$; $z'_t = 1$;

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\,dt = \sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Тогда

$$I = \int\limits_{(l)} z\,ds = \int\limits_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left((2+t_0)^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

5. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} x^2 ds$, где (l) — окружность:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Решение. Плоскость $x + y + z = 0$ проходит через начало координат и пересекается со сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ по окружности радиуса a. Таким образом, (l) — окружность радиуса $a \Rightarrow$ длина

(l) равна $2\pi a$. Легко понять, что $\int\limits_{(l)} x^2 ds = \int\limits_{(l)} y^2 ds = \int\limits_{(l)} z^2 ds$. А тогда $I = \int\limits_{(l)} x^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_{(l)} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$. Заметим, что на (l), т. е. на окружности радиуса a с центром в точке O, подынтегральная функция равна a^2. Следовательно, $I = \frac{1}{3}\int\limits_{(l)} a^2 ds = \frac{a^2}{3}\int\limits_{(l)} ds$. Но $\int\limits_{(l)} ds$ равен значению длины окружности (l), т. е. $2\pi a$. Поэтому $I = \frac{2\pi a^3}{3}$.

§2. Криволинейные интегралы второго рода

1°. Определение. Пусть в пространстве дана непрерывная кривая $\smile AB$. Пусть на $\smile AB$ задана функция $f(x, y, z)$. Выберем на $\smile AB$ какое-нибудь направление (одно из двух возможных), например, от точки A к точке B. Проделаем следующие операции.

1. Разбиваем $\smile AB$ точками $A_0 = A$, A_1, A_2, , A_{n-1}, $A_n = B$ на n частичных дуг $\smile A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Точки $A_k(x_k, y_k, z_k)$ следуют друг за другом вдоль $\smile AB$ в направлении от точки A к точке B. Пусть d_k — диаметр $\smile A_k A_{k+1}$ $\Big(d_k = \sup\limits_{\substack{M \in \smile A_k A_{k+1}, \\ N \in \smile A_k A_{k+1}}} \{\rho(M, N)\}\Big)$ и пусть $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0, n-1}} \{d_k\}$.

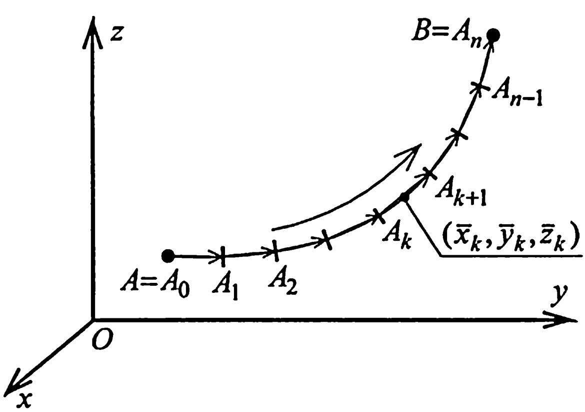


Рис. 9.5. К определению
криволинейного интеграла второго рода

2. На каждой $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение данной функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Соединим концы каждой частичной дуги хордой и придадим этим хордам направления соответствующих дуг. Получим направленную ломаную. Звенья этой ломаной есть векторы $\overrightarrow{\Delta l_0}$, $\overrightarrow{\Delta l_1}$, ..., $\overrightarrow{\Delta l_{n-1}}$. Спроектируем эти векторы на ось Ox. Получим числа Δx_0, Δx_1, ..., Δx_{n-1} ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{\Delta l_k}$). Эти числа могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

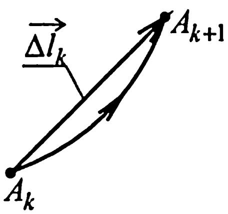


Рис. 9.6.
К определению криволинейного интеграла второго рода

3. Каждое вычисленное значение функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ умножаем на проекцию соответствующего звена ломаной на ось Ox. Получим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k$ (σ — интегральная сумма).

5. Измельчаем дробление $\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$ так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения $\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$, ни от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой $\smile AB$ (по x) и обозначается $\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, dx$.

Замечания.

1. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при перемене направления линии, по которой производится интегрирование, т. е.

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, dx = -\int\limits_{\smile BA} f(x, y, z)\, dx.$$

Это ясно, ибо проекции звеньев ломаной $\overrightarrow{\Delta l_k}$ на ось Ox существенно зависят от направления $\smile A_k A_{k+1}$ и меняют знак с изменением этого направления на обратное.

2. Если звенья $\overrightarrow{\Delta l_k}$ направленной ломаной проектировать на ось Oy, то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x,y,z)$ по $\smile AB$ (по y):

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\,\Delta y_k .$$

3. Если звенья $\overrightarrow{\Delta l_k}$ направленной ломаной проектировать на ось Oz, то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x,y,z)$ по $\smile AB$ (по z):

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\,\Delta z_k .$$

4. Если на кривой $\smile AB$ определены три функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и если существуют интегралы $\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx$, $\int\limits_{\smile AB} Q(x,y,z)\,dy$, $\int\limits_{\smile AB} R(x,y,z)\,dz$, то их сумму называют криволинейным интегралом второго рода ("общего вида") и полагают

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{\smile AB} Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_{\smile AB} R(x,y,z)\,dz .$$

Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

2°. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Теорема.

1. Пусть кривая $\smile AB$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases}$ где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ — функции, заданные и непрерывные на промежутке $[a,b]$. Кроме того, у функции $\varphi(t)$ на $[a,b]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$. Пусть

$(\varphi(a), \psi(a), \omega(a)) = A$, $(\varphi(b), \psi(b), \omega(b)) = B$, причем $A \neq B$, т. е. кривая $\smile AB$ — незамкнутая. Пусть точки $(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[a, b]$.

2. Пусть функция $f(x, y, z)$, заданная на $\smile AB$, непрерывна там.

Тогда $I = \int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, dx$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt. \tag{1}$$

Замечания.

1. Интеграл $I_* = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$ существует, ибо подынтегральная функция в нем непрерывна на $[a, b]$.

2. Нижний предел в I_* должен отвечать началу пути интегрирования в I, а верхний предел — концу пути интегрирования.

▶ Составим интегральную сумму σ для I. Для этого надо разбить $\smile AB$ точками $A_k(x_k, y_k, z_k)$ на частичные дуги $\smile A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($A_0 = A$, $A_n = B$). Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[a, b]$ произвольным образом точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и положить $A_k(\varphi(t_k), \psi(t_k), \omega(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Затем на каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ надо взять произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$, $\bar{z}_k = \omega(\theta_k)$. Тогда получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k))(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)).$$

По формуле Лагранжа $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$, где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Поэтому $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$.

Видим, что эта сумма похожа на интегральную сумму Римана для определенного интеграла I_*, но таковой не является, ибо, вообще говоря, $\theta_k \neq \tau_k$.

Составим сумму $\sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k)) \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$. Это уже настоящая интегральная сумма Римана для I_*. Было отмечено выше, что интеграл I_* существует, и потому $\sigma_* \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ ($\lambda_* = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \{\Delta t_k\}$). Отметим, что $\lambda \to 0$, если $\lambda_* \to 0$.

Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \tag{2}$$

Из (2) видим, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\substack{\lambda_* \to 0 \\ (\lambda \to 0)}} (\sigma - \sigma_*) = 0.$$

Имеем

$$\sigma - \sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k)) \right] \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k.$$

По условию $\varphi'(t) \in C([a,b]) \Rightarrow \varphi'(t)$ — ограниченная в $[a,b]$, т. е. существует число $M > 0$, такое, что $|\varphi'(t)| \leq M$ для всех $t \in [a,b]$. Поэтому

$$|\sigma - \sigma_*| \leq M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k)) \right| \cdot \Delta t_k.$$

Функция $f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \in C([a,b])$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow$ $f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ — равномерно непрерывная в $[a,b]$. Значит, всякому $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малому) отвечает $\delta > 0$, такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[a,b]$, для которых $|t'' - t'| < \delta$, будет

$$|f(\varphi(t''), \psi(t''), \omega(t'')) - f(\varphi(t'), \psi(t'), \omega(t'))| < \varepsilon.$$

Возьмем дробление промежутка $[a,b]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$ любым, но таким, чтобы было $\lambda_* < \delta$. У нас θ_k и $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Следовательно, $|\theta_k - \tau_k| \leq t_{k+1} - t_k \leq \lambda_* < \delta$, для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. А тогда для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ будем иметь

$$\left|f(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k),\omega(\theta_k))-f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k),\omega(\tau_k))\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, $|\sigma-\sigma_*|<M\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\cdot\Delta t_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\sigma-\sigma_*|<\varepsilon\cdot M\cdot(b-a). \tag{3}$$

Отметим, что число $\varepsilon\cdot M(b-a)$ сколь угодно мало вместе с ε. Так как для достижения неравенства (3) потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_*<\delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda_*\to 0}(\sigma-\sigma_*)=0$, а значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\sigma-\sigma_*)=0$. ◀

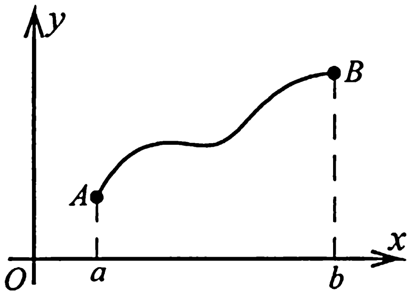


Рис. 9.7. К частному случаю I

Частные случаи.

I. 1) Пусть кривая $\smile AB$ плоская, заданная явным уравнением $y=\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $[a,b]$, причем a — абсцисса точки A, а b — абсцисса точки B.

2) Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на кривой $\smile AB$.

Тогда $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx$ существует, и

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\,dx.$$

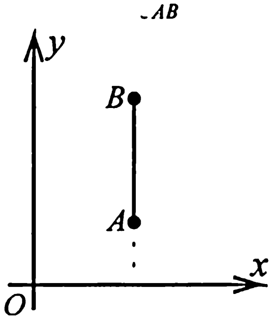


Рис. 9.8. К частному случаю II

II. Пусть $\smile AB$ — прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox. Тогда $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx$ существует для любой функции $f(x,y)$, определенной на $\smile AB$, причем $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx=0$.

3°. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода вытекает из решения следующей задачи.

Задача. Материальная точка перемещается по кривой $\smile AB$ из точки A в точку B под действием переменной по величине и направлению силы $\vec{F}(x,y,z)$. Требуется найти работу силы $\vec{F}$ на криволинейном пути $\smile AB$.

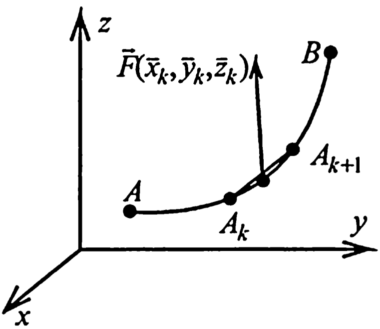


Рис. 9.9. К решению задачи

▶ Разбиваем путь $\smile AB$ на столь малые части $\smile A_k A_{k+1}$, чтобы каждую такую часть можно было считать приближенно прямолинейной, а силу $\vec{F}(x,y,z)$, в пределах этой части, считать приближенно постоянной по величине и направлению. Тогда работа силы $\vec{F}(x,y,z)$ на элементарном участке $\smile A_k A_{k+1}$ приближенно будет равна $\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\overrightarrow{\Delta l_k}$. Но

$$\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k) = F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{i} + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{j} + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{k},$$

$$\overrightarrow{\Delta l_k} = \Delta x_k\cdot\vec{i} + \Delta y_k\cdot\vec{j} + \Delta z_k\cdot\vec{k}.$$

Поэтому

$$\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\overrightarrow{\Delta l_k} = F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta x_k + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta y_k + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta z_k.$$

Следовательно, работа силы $\vec{F}$ на всем пути $\smile AB$ приближенно будет равна

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta x_k + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta y_k + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta z_k\Big). \quad (4)$$

Предел суммы (4) при $\lambda \to 0$ будет давать точное значение работы силы $\vec{F}(x,y,z)$ на пути $\smile AB$. А этим пределом является

$$\int_{\smile AB} F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz.$$

Таким образом, всякий криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

можно истолковать как работу, которую производит сила с проекциями P, Q, R на оси Ox, Oy, Oz соответственно, по перемещению материальной точки по пути $\smile AB$ из точки A в точку B.

Примеры на вычисление криволинейных интегралов второго рода.

1. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x+y)\,dx + 2z\,dy + xy\,dz$, где $\smile AB$ — линия, заданная уравнениями $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = 3-t, \end{cases}$ причем точка A соответствует значению параметра $t = 1$, а точка B — значению параметра $t = 2$.

▶ $I = \int\limits_1^2 (t+t^2)\,dt + \int\limits_1^2 2(3-t)\cdot 2t\,dt + \int\limits_1^2 t^3\cdot(-dt) = \dfrac{35}{4}$. ◀

2. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, где (l) — кривая, заданная уравнением $y = 1-|1-x|$, $x\in[0,2]$. Интегрирование вдоль (l) ведется в направлении, соответствующем возрастанию параметра.

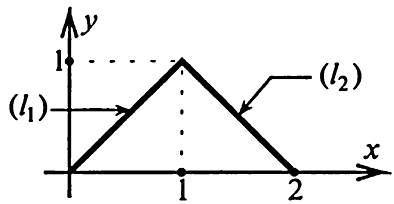


Рис. 9.10. К примеру 2

▶ Имеем:

$y = 1-(1-x) \Rightarrow y = x,\ x\in[0,1]$;

$y = 1+(1-x) \Rightarrow y = 2-x,\ x\in[1,2]$;

$(l) = (l_1)\cup(l_2)$, где (l_1): $y = x$, $x\in[0,1]$, (l_2): $y = 2-x$, $x\in[1,2]$.

$I = I_1 + I_2$, где

$I_1 = \int\limits_{(l_1)} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, $I_2 = \int\limits_{(l_2)} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$.

На (l_1): $y = x$, $dy = dx$, $x\in[0,1]$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_0^1 (x^2+x^2)\,dx + 0\cdot dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

На (l_2): $y = 2-x$, $x\in[1,2]$; $dy = -dx$. Поэтому

$$I_2 = \int\limits_1^2 \left[x^2+(2-x)^2-x^2+(2-x)^2\right]dx = 2\int\limits_1^2 (2-x)^2 dx = -\frac{2}{3}(2-x)^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $I = \frac{4}{3}$. ◀

3. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, где (l) — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода стрелки часов.

▶ Перейдем к параметрическому заданию кривой (l). Положим

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} dx = -a\sin t\,dt, \\ dy = a\cos t\,dt. \end{matrix}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-a^2(\cos t + \sin t)\sin t - a^2(\cos t - \sin t)\cos t}{a^2}\,dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi. \blacktriangleleft$$

4. Вычислить $I = \int\limits_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx$, где OmA — отрезок параболы $y = x^2$, OnA — отрезок прямой $y = x$.

▶ $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int\limits_{\smile OmA}$, $I_2 = \int\limits_{\smile AnO}$.

$\smile OmA$: $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $dy = 2x\,dx$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot 2x\,dx - dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ 2x\,dx = dv, & v = x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \right) - 1 = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2.$$

$\smile AnO$: $y = x$, x изменяется от 1 до 0; $dy = dx$. Поэтому

$$I_2 = \int\limits_1^0 (\operatorname{arctg} 1 - 1)\,dx = \int\limits_1^0 \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$$I = 2\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1. \blacktriangleleft$$

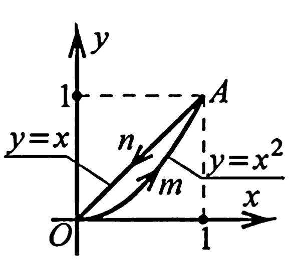


Рис. 9.11. К примеру 4

5. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где (l) — контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

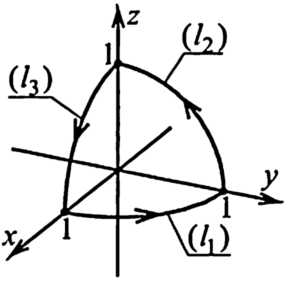


Рис. 9.12. К примеру 5

▶ $I = I_1 + I_2 + I_3$,

где $I_1 = \int\limits_{(l_1)}$; $I_2 = \int\limits_{(l_2)}$; $I_3 = \int\limits_{(l_3)}$.

(l_1): $x^2 + y^2 = 1$ (1-я четверть),

(l_2): $y^2 + z^2 = 1$ (1-я четверть),

(l_3): $z^2 + x^2 = 1$ (1-я четверть).

Контур (l_1) расположен в плоскости Oxy. Следовательно, на (l_1): $z = 0$; $dz = 0$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{(l_1)} y^2dx - x^2dy = \int\limits_1^0 (1 - x^2)\,dx - \int\limits_0^1 (1 - y^2)\,dy =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=0} - \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

Контур (l_2) расположен в плоскости Oyz. Следовательно, на (l_2): $x = 0$, $dx = 0$.

$$I_2 = \int\limits_{(l_2)} z^2dy - y^2dz = \int\limits_1^0 (1 - y^2)\,dy - \int\limits_0^1 (1 - z^2)\,dz = -\frac{4}{3}.$$

Контур (l_3) расположен в плоскости Oxz. Следовательно, на (l_3): $y = 0$, $dy = 0$.

$$I_3 = \int\limits_{(l_3)} x^2dz - z^2dx = \int\limits_1^0 (1 - z^2)\,dz - \int\limits_0^1 (1 - x^2)\,dx = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем $I = -\frac{4}{3} \cdot 3 = -4$. ◀

§3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутым плоским кривым. Формула Грина

1°. Станем рассматривать криволинейные интегралы второго рода вида

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \tag{1}$$

где (K) — замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy. Если на контуре (K) выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на (K) взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования. В самом деле, пусть A и B — любые две различные точки на (K). Имеем

$$\int\limits_{\smile AA} Pdx + Qdy = \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} Pdx + Qdy + \int\limits_{\smile B\mathrm{II}A} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{\smile B\mathrm{II}A} Pdx + Qdy + \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} Pdx + Qdy = \int\limits_{\smile BB} Pdx + Qdy.$$

Замечание. Особенность обсуждаемого случая заключается в том, что указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки на этот раз не определяет направления интегрирования на (K). Конечно, можно было бы в каждом случае указывать особо, какое именно направление имеется в виду. Но обычно поступают иначе, а именно: из двух возможных направлений одно принимается за положительное, другое — за отрицательное.

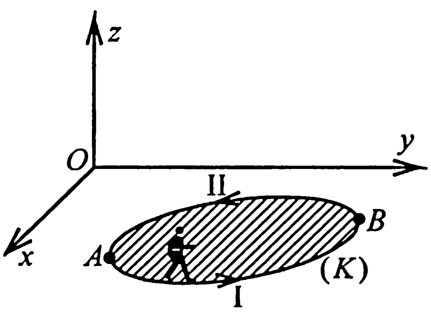


Рис. 9.13. К определению положительного обхода контура (K)

Условимся за *положительное направление обхода контура* (K) принимать такое направление, когда наблюдатель (у которого направление от ног к голове совпадает с направлением оси Oz), обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K), слева от себя. Это соглашение относится к случаю правой системы координат.

В дальнейшем интеграл (1), взятый по (K) в положительном направлении, будем обозначать символом $\oint\limits_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

2°. Формула Грина.

I. Пусть (D) — область, ограниченная замкнутым контуром (K). Пусть (K) состоит из отрезков прямых $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и из кривых, заданных уравнениями $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$; $y = \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Предполагается, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и такие, что $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Такую область (D) будем называть *областью типа I.* Пусть в $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $P(x,y)$, имеющая в $(\overline{D})$ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Рассмотрим двойной интеграл

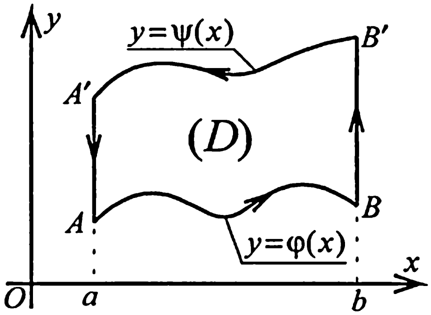


Рис. 9.14. К выводу формулы Грина

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

Мы знаем, что этот двойной интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \quad \Rightarrow \quad I = \int\limits_a^b \left[P(x,y)\Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big[P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)) \big]\,dx = \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx.$$

Но

$$\int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx = \int\limits_{\smile A'B'} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{\smile B'A'} P(x,y)\,dx,$$

$$\int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = \int_{\smile AB} P(x,y)\,dx\,.$$

Поэтому $I = -\int_{\smile B'A'} P(x,y)\,dx - \int_{\smile AB} P(x,y)\,dx$. Так как $\int_{\smile BB'} P(x,y)\,dx = 0$ и $\int_{\smile A'A} P(x,y)\,dx = 0$, то можем написать

$$I = -\int_{\smile AB} P\,dx - \int_{\smile BB'} P\,dx - \int_{\smile B'A'} P\,dx - \int_{\smile A'A} P\,dx = -\oint_{(K)} P(x,y)\,dx\,.$$

Таким образом, получили

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint_{(K)} P(x,y)\,dx\,. \tag{2}$$

Замечание. Формула (2) установлена для области типа I, но она верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Oy, может быть разложена на конечное число областей типа I (рис. 9.15).

В самом деле, для каждой области типа I, на которые разложена область (D), пишем формулу (2), а затем складываем соответствующие части полученных соотношений. Так как криволинейные интегралы по вспомогательным прямым линиям равны нулю, то получим формулу (2), в которой (D) — вся область, а (K) — контур всей этой области.

II. Пусть (D) — область, ограниченная замкнутым контуром (K), и пусть теперь (K) состоит из отрезков прямых $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ и из кривых, заданных уравнениями $x = \alpha(y)$,

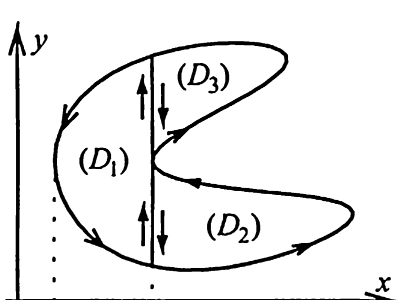


Рис. 9.15. К выводу формулы Грина

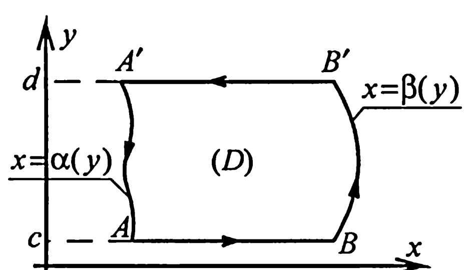


Рис. 9.16. К выводу формулы Грина

$x=\beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — функции, непрерывные на $[c,d]$ и такие, что $\alpha(y)<\beta(y)$, $y\in[c,d]$ (рис. 9.16). Такую область (D) будем называть *областью типа II.*

Пусть в $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $Q(x,y)$, имеющая в $(\overline{D})$ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

Мы знаем, что этот интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$I=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \quad\Rightarrow\quad I=\int\limits_c^d\left[Q(x,y)\Big|_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)}\right]dy=$$

$$=\int\limits_c^d Q(\beta(y),y)\,dy-\int\limits_c^d Q(\alpha(y),y)\,dy.$$

Но

$$\int\limits_c^d Q(\beta(y),y)\,dy=\int\limits_{\smile BB'}Q(x,y)\,dy;$$

$$\int\limits_c^d Q(\alpha(y),y)\,dy=\int\limits_{\smile AA'}Q(x,y)\,dy=-\int\limits_{\smile A'A}Q(x,y)\,dy.$$

Поэтому $I=\int\limits_{\smile BB'}Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\smile A'A}Q(x,y)\,dy$. Так как $\int\limits_{\smile AB}Q(x,y)\,dy=0$ и $\int\limits_{\smile B'A'}Q(x,y)\,dy=0$, то можем написать

$$I=\int\limits_{\smile AB}Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\smile BB'}Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\smile B'A'}Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\smile A'A}Q(x,y)\,dy=$$

$$=\oint\limits_{(K)}Q(x,y)\,dy.$$

Таким образом, получили

$$\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy=\oint\limits_{(K)}Q(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Замечание. Формула (3) верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Ox, разлагается на конечное число областей типа II. Это устанавливается совершенно аналогично тому, как это сделано в предыдущем замечании.

Пусть область (D) такая, что она прямыми линиями, параллельными оси Oy, разлагается на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox — на конечное число областей типа II. Пусть в $(\overline{D})$ заданы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывные там вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда верны одновременно формулы (2) и (3). Вычитая из формулы (3) соответствующие части формулы (2), получим

$$\oint_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{(\overline{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,. \qquad (4)$$

(4) — *формула Грина.* Она преобразует криволинейный интеграл второго рода по замкнутому самонепересекающемуся контуру в двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Определение.

1. Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется *односвязной.*

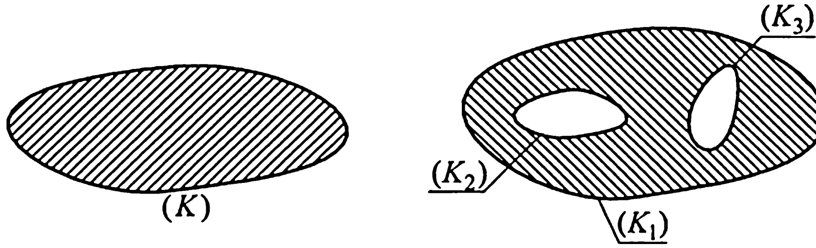
2. Область, ограниченная замкнутым самонепересекающимся контуром (K_1) и $(n-1)$ замкнутыми самонепересекающимися контурами (K_2), (K_3), , (K_n), лежащими внутри (K_1) и вне друг друга, называется n-связной.

Теорема. Формула Грина

$$\oint_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{(\overline{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (5)$$

верна и для многосвязной области, если под контуром (K) понимать объединение всех контуров (K_1), (K_2), $\cdots$, (K_n), ограничивающих область (D), причем направление интегрирования такое, что наблюдатель, обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K), слева от себя (система координат предполагается правой).

▶ Рассмотрим для простоты трехсвязную область (D) (см. рис. 9.17). Возьмем на (K_1) точки A_1 и B_1; на (K_2) — точки A_2 и B_2; на (K_3) — точки A_3 и B_3. Проведем линии: $\smile A_1A_2$; $\smile B_2A_3$;



Односвязная область Трехсвязная область

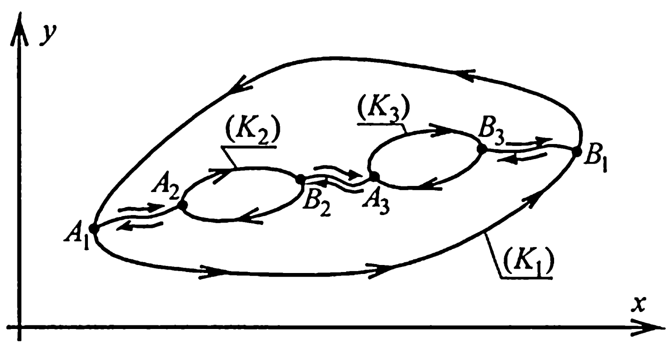


Рис. 9.17. К выводу формулы Грина
для многосвязных областей

$\smile B_3B_1$. Тогда область (D) разобьется на две односвязные области. Написав формулу Грина для каждой из этих двух односвязных областей и сложив результаты, мы получим формулу (5). (По каждой вспомогательной кривой $\smile A_1A_2$, $\smile B_2A_3$, $\smile B_3B_1$ интегрирование ведется дважды в двух противоположных направлениях. Следовательно, криволинейные интегралы по вспомогательным кривым взаимно уничтожаются.)

§4. Вопрос о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть (D) — область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром (K) (значит, (D) — односвязная область). Пусть в (D) заданы две непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Будем говорить, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в (D) *пару типа* "α ", если криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_{\smile AB} P\,dx + Q\,dy$, взятый по незамкнутому пути $\smile AB$, целиком лежащему в (D), не зависит от формы пути (а зависит только от концов пути).

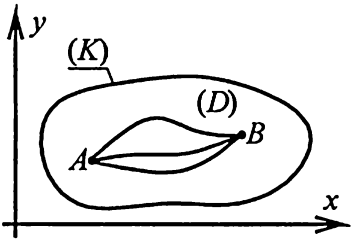


Рис. 9.18. К определению интеграла, не зависящего от формы пути

Будем говорить, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в (D) *пару типа* "β", если для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C), целиком лежащего в (D), оказывается: $\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = 0$.

Лемма 1. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в области (D) пару типа "α", то они образуют в (D) также и пару типа "β".

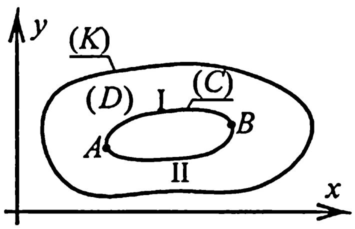


Рис. 9.19. К доказательству леммы 1

▶ Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "α" в (D). Возьмем в (D) любой замкнутый самонепересекающийся контур (C). Выберем и закрепим на (C) любые две точки A и B. Эти точки разобьют (C) на две дуги: $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$. Имеем

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\,\mathrm{II}\,B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\smile B\,\mathrm{I}\,A} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\smile A\,\mathrm{II}\,B} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\smile A\,\mathrm{I}\,B} P\,dx + Q\,dy. \qquad (1)$$

У нас P и Q — пара типа "α" в (D). Поэтому

$$\int\limits_{\smile A\,\mathrm{II}\,B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\,\mathrm{I}\,B} P\,dx + Q\,dy.$$

А тогда из (1) следует, что $\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = 0$. Так как (C) — любой замкнутый самонепересекающийся контур, лежащий в (D), то последнее означает, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в (D). ◀

Лемма 2. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в области (D) пару типа "β", то они образуют в (D) также и пару типа "α".

▶ Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в (D). Возьмем в (D) любые две точки A и B и соединим их двумя различными линиями: $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$, целиком лежащими в (D). Лемма 2 будет доказана, если показать, что

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy. \qquad (2)$$

Установим соотношение (2) в следующих двух простых случаях.

1) Линии $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$ не имеют других общих точек, кроме точек A и B (см. рис. 9.20а). В этом случае наши линии образуют замкнутый самонепересекающийся контур. Так как функции P и Q — пара типа "β" в (D), то

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{II}B\mathrm{I}A} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\smile B\mathrm{I}A} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy.$$

Видим, что соотношение (2) в этом случае установлено.

2) Линии $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$ кроме точек A и B имеют еще и другие общие точки, но существует линия $\smile A\,\mathrm{III}\,B$, которая пересекается с ними только в точках A и B (см. рис. 9.20б). Тогда, по доказанному в случае 1), имеем

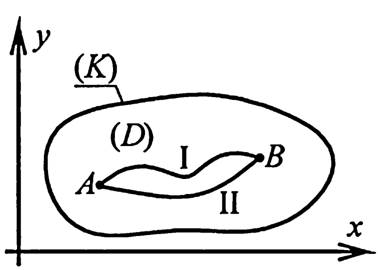


Рис. 9.20а. К доказательству леммы 2

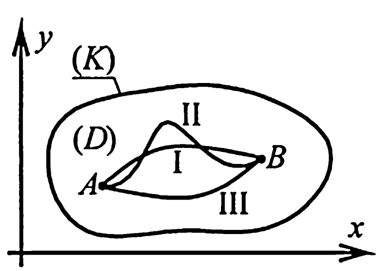


Рис. 9.20б. К доказательству леммы 2

$$\int\limits_{\smile AIB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile AIIIB} P\,dx + Q\,dy, \quad \int\limits_{\smile AIIB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile AIIIB} P\,dx + Q\,dy,$$

а значит, и

$$\int\limits_{\smile AIB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile AIIB} P\,dx + Q\,dy.$$

Видим, что соотношение (2) установлено и в этом случае.

3) В более сложных случаях утверждение леммы 2 принимаем без доказательства. Рис. 9.20в — пример как раз того случая, который не подходит ни к 1), ни к 2). ◀

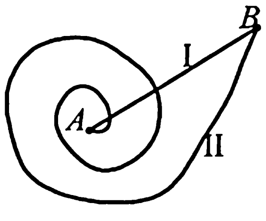


Рис. 9.20в. К лемме 2

Следствие. Свойство пар функций иметь в области (D) тип "α" равносильно свойству иметь тип "β".

Теорема. Пусть в односвязной области (D) заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны в (D) и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда: для того, чтобы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ были парой типа "β" (а значит, и парой типа "α") в (D), необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

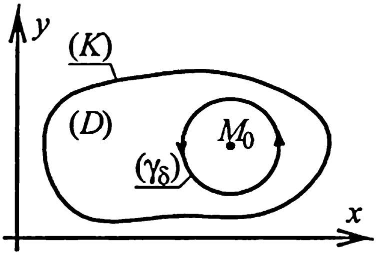


Рис. 9.21. К доказательству теоремы

▶ *Необходимость.* Дано: $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в (D). Требуется доказать, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D).

Рассуждаем от противного. Допустим, что соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в (D). Но тогда в (D) имеется точка $M_0(x_0, y_0)$, такая, что $\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(\cdot)M_0} \neq 0$. Пусть для определенности $\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(\cdot)M_0}>0$. Так как $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ — функция непрерывная в (D), то по теореме о стабильности знака существует $\overline{u}_\delta(M_0)$, такая, что $\overline{u}_\delta(M_0)\subset(D)$ и что $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$ в $\overline{u}_\delta(M_0)$ ($\overline{u}_\delta(M_0)$ — замкнутый круг радиуса δ с центром в точке M_0; (γ_δ) — контур этого круга). Так как $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\in C(\overline{u}_\delta(M_0))$, то эта разность достигает в $\overline{u}_\delta(M_0)$ своего наименьшего m значения. Ясно, что $m>0$.

По формуле Грина имеем

$$\oint\limits_{(\gamma_\delta)} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(\overline{u}_\delta(M_0))}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\geq m\cdot\iint\limits_{(\overline{u}_\delta(M_0))}dxdy=m\cdot\pi\delta^2>0,$$

а это невозможно, ибо $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в (D). Таким образом, предположение, что соотношение $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в (D), приводит к противоречию.

Достаточность. Дано: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D). Требуется доказать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в (D) пару типа "β".

Возьмем любой замкнутый самонепересекающийся контур (C), целиком лежащий в (D) (см. рис. 9.22). Пусть (Δ) — область, ограниченная контуром (C). По формуле Грина имеем

$$\oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(\Delta)}\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0\ \text{в}\ (\overline{\Delta})}dxdy=0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=0\Rightarrow$ функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в (D). ◀

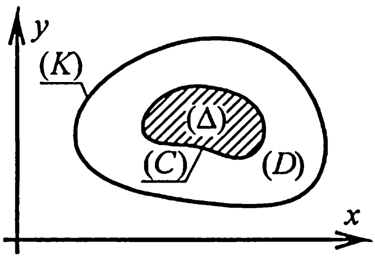


Рис. 9.22. К доказательству теоремы

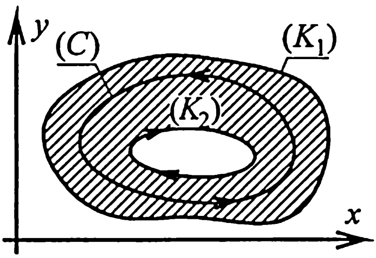


Рис. 9.23. К замечанию

Замечание. Важно подчеркнуть, что доказанное утверждение верно при условии, что область (D) — односвязная.

Действительно, если бы область (D) была, например, двусвязной с внешним контуром (K_1) и внутренним контуром (K_2) (см. рис. 9.23), то для контура (C), охватывающего контур (K_2), мы имели бы

$$\int\limits_{\substack{(C),\text{ обл. слева}\\ \circlearrowleft}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\substack{(K_2),\text{ обл. слева}\\ \circlearrowright}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0,$$

ибо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ всюду в (D), а значит, и в $(\bar{\Delta})$ ((Δ) — область, ограниченная контурами (C) и (K_2)). Значит,

$$\int\limits_{(C)\circlearrowleft} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(K_2)\circlearrowright} P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{(C)\circlearrowleft} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(K_2)\circlearrowleft} P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{(C)\circlearrowleft} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(K_2)\circlearrowleft} P\,dx + Q\,dy \quad (\neq 0\text{, вообще говоря}).$$

Значит, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не есть пара типа "β" в (D).

Пример. Пусть $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Эти функции определены и непрерывны на плоскости Oxy всюду, за исключением точки $O(0, 0)$.

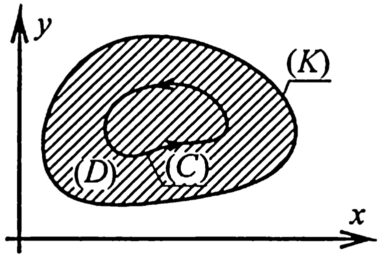


Рис. 9.24. К примеру

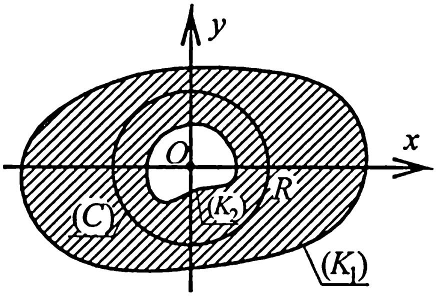


Рис. 9.25. К примеру

Имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ всюду на плоскости Oxy, кроме точки $O(0,0)$. Значит, для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C), не охватывающего начала координат, будет

$$\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{(C)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0,$$

так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — пара типа "β" в области (D), ограниченной контуром (K) (см. рис. 9.24).

Пусть (C) — окружность радиуса R с центром в точке $O(0,0)$. Вычислим $I = \oint\limits_{(C)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$. Параметрическими уравнениями (C) будут

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

А тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t}{R^2}\,dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi \quad (\neq 0).$$

$P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в области (D_1), ограниченной контуром (K_1), не есть пара типа "β", ибо нарушена непрерывность в точке $O(0,0)$, расположенной внутри контура (K_1). Если же выключить точку

$O(0,0)$, окружив ее контуром (K_2) (см. рис. 9.25), то условие непрерывности в области (D_2), ограниченной контурами (K_1) и (K_2), будет иметь место, но нарушится односвязность.

Дополнение. Пусть выполнены все условия теоремы, а значит, $\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по любому незамкнутому пути $\smile AB$, целиком лежащему в (D), не зависит от формы пути, а зависит только от концов пути. Пусть функция $u(x,y)$ определена в (D) и такая, что

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du\,(x,y)$$

(т. е. выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом функции $u\,(x,y)$). Тогда

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = u\,(x_B, y_B) - u\,(x_A, y_A)$$

(здесь x_A, y_A — координаты точки A, а x_B, y_B — координаты точки B).

▶ По условию, $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du\,(x,y)$. Это значит, что

$$P(x,y) = \frac{\partial u\,(x,y)}{\partial x}; \quad Q(x,y) = \frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$I = \int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\smile AB} \frac{\partial u\,(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y}dy.$$

Для вычисления интеграла I введем параметрические уравнения $\smile AB$. Пусть они такие: $\begin{cases} x = \varphi\,(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$, причем значению $t = p$ отвечает точка A, а значению $t = q$ отвечает точка B. Будем иметь тогда

$$I = \int\limits_p^q \left[\frac{\partial u\left(\varphi\,(t), \psi(t)\right)}{\partial x}\cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u\left(\varphi\,(t), \psi(t)\right)}{\partial y}\cdot \psi'(t)\right]dt.$$

Заметив это, рассмотрим функцию $f(t) = u\left(\varphi\,(t), \psi(t)\right)$. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$f'(t) = \frac{\partial u\big(\varphi(t), \psi(t)\big)}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u\big(\varphi(t), \psi(t)\big)}{\partial y} \cdot \psi'(t).$$

Следовательно, предыдущее выражение для I принимает вид

$$I = \int_p^q f'(t)\,dt = f(q) - f(p).$$

Но $f(q) = u\big(\varphi(q), \psi(q)\big) = u(x_B, y_B)$; $f(p) = u\big(\varphi(p), \psi(p)\big) = u(x_A, y_A)$ (у нас $\varphi(p) = x_A$, $\psi(p) = y_A$, $\varphi(q) = x_B$, $\psi(q) = y_B$). Поэтому

$$I = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A). \blacktriangleleft$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int\limits_{\smile AB} P\,dx + Q\,dy$ нужно найти функцию $u(x,y)$, первообразную для дифференциала $P\,dx + Q\,dy$, и составить разность значений этой первообразной в конце и в начале пути интегрирования. Ясно, что это — аналог формулы Ньютона — Лейбница.

Примеры к §4.

1. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x-y)(dx-dy)$, где $\smile AB$ — любая кривая, соединяющая точки $A(1,-1)$ и $B(1,1)$.

Решение. В этом случае $P(x,y) = x - y$; $Q(x,y) = y - x$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$ на всей плоскости. Следовательно, в любой односвязной области, расположенной в плоскости Oxy, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. Так как

$$(x-y)(dx-dy) = (x-y)\cdot d(x-y) = \frac{1}{2}d\Big((x-y)^2\Big),$$

то такой функцией $u(x,y)$ будет $u(x,y) = \dfrac{1}{2}(x-y)^2$. Поэтому

$$I = \frac{(x-y)^2}{2}\Bigg|_{(1,-1)}^{(1,1)} = 0 - \frac{2^2}{2} = -2.$$

2. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$, где $\smile AB$ — любая кривая, соединяющая точки $A(-2,-1)$ и $B(3,0)$.

Решение. Здесь $P(x,y) = x^4 + 4xy^3$; $Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$ на всей плоскости Oxy. Следовательно, I не зависит от формы пути интегрирования, соединяющего точки A и B. А раз так, то возьмем, например, в качестве пути $\smile AB$ ломаную $AC \cup CB$ (см. рис. 9.26). Тогда

$$I = \int\limits_{\smile AB} = \int\limits_{\smile AC} + \int\limits_{\smile CB} \quad (= I_1 + I_2).$$

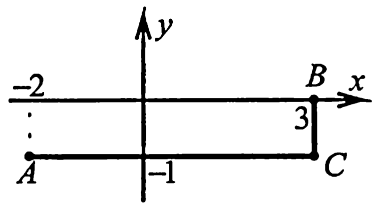


Рис. 9.26. К примеру 2

Имеем

$$\smile AC = \begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dy = 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\smile AC} = \int\limits_{-2}^{3} (x^4 - 4x)\,dx + 0 = \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{3} = 45.$$

Имеем

$$\smile CB = \begin{cases} x = 3 \\ -1 \le y \le 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dx = 0.$$

Поэтому

$$I_2 = \int\limits_{\smile CB} = \int\limits_{-1}^{0} (54y^2 - 5y^4)\,dy = (18y^3 - y^5)\Big|_{-1}^{0} = 17.$$

Следовательно, $I = 45 + 17 = 62$.

3. Вычислить $\quad I = \int\limits_{\smile AB} \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$,

где $\smile AB$ — любая кривая, соединяющая точки $A(1,\pi)$ и $B(2,\pi)$ и не пересекающая ось Oy.

Решение. Здесь

$$P(x,y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\,; \quad Q(x,y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\,;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}\,, \quad x \neq 0\,.$$

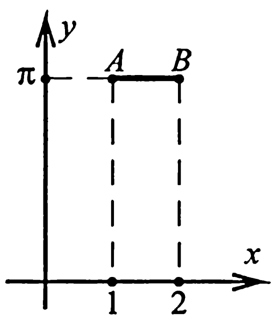


Рис. 9.27.
К примеру 3

Видим, что $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy, кроме точек, лежащих на оси Oy, и что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ для $x \neq 0$. Следовательно, I не зависит от формы пути $\smile AB$. Требуется только, чтобы $\smile AB$ не пересекала ось Oy. А раз так, то возьмем, например, в качестве $\smile AB$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки A и B (см. рис. 9.27). Так как

$$\smile AB = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ y = \pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dy = 0\,,$$

то будем иметь

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx + 0 = \left(x + \pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = 1 + \pi\,.$$

§5. Площадь плоской фигуры в криволинейных координатах

1°. Вычисление площади плоской фигуры при помощи криволинейного интеграла второго рода.

Пусть (K) — простой, замкнутый самонепересекающийся контур, ограничивающий область (D).

1) Пусть область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy, она может быть разложена на конечное число областей типа I.

Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_{(K)} y\,dx$ (это — частный случай интеграла $\oint\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$, когда $P \equiv y$, а $Q \equiv 0$). Преобразуя $\oint\limits_{(K)} y\,dx$ по формуле Грина, получим $\oint\limits_{(K)} y\,dx = -\iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = -F_{\overline{D}} \Rightarrow$

$$F_{\overline{D}} = -\oint\limits_{(K)} y\,dx. \tag{1}$$

2) Пусть теперь область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Ox, ее можно разложить на конечное число областей типа II. Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_{(K)} x\,dy$ (это — частный случай интеграла $\oint\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$, когда $P \equiv 0$, $Q \equiv x$). Преобразуя $\oint\limits_{(K)} x\,dy$ по формуле Грина, получим $\oint\limits_{(K)} x\,dy = \iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = F_{\overline{D}} \Rightarrow$

$$F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K)} x\,dy. \tag{2}$$

3) Пусть, наконец, область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy, она может быть разложена на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox, — на конечное число областей типа II. Тогда будут верны одновременно формулы (1) и (2). Сложив соответствующие части этих формул, получим

$$2F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx \quad \Rightarrow \quad F_{\overline{D}} = \frac{1}{2}\oint\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx. \tag{3}$$

2°. Формула для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в плоскостях Oxy и $O\xi\eta$ расположены области (D) и (Δ) с простыми контурами (K_D) и (K_Δ). Если дано правило, которое каждой точке (ξ,η) из $(\overline{\Delta})$ сопоставляет одну и только одну точку (x,y) из $(\overline{D})$, причем каждая точка (x,y) из $(\overline{D})$ оказывается сопоставленной одной и только одной точке из $(\overline{\Delta})$, то говорят, что между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ установлено *взаимно-однозначное соответствие.*

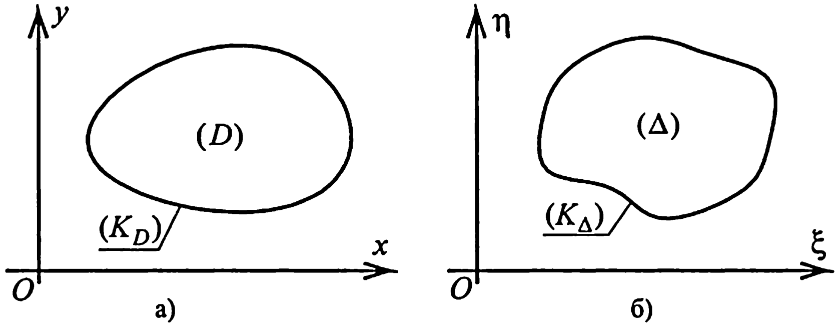


Рис. 9.28. К выводу формулы для площади в криволинейных координатах

Если (ξ,η) и (x,y) есть взаимно-соответствующие точки, то

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения (4) есть уравнения преобразования $(\overline{\Delta})$ в $(\overline{D})$. В силу взаимной однозначности соответствия между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$, система (4) однозначно разрешима относительно ξ и η. Поэтому

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{5}$$

Впредь функции $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ будем считать непрерывными в $(\overline{\Delta})$, а функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ — непрерывными в $(\overline{D})$. Покажем, что тогда непрерывные кривые, лежащие, например, в $(\overline{\Delta})$, преобразуются в непрерывные кривые, лежащие в $(\overline{D})$.

В самом деле, пусть (λ) — непрерывная кривая, лежащая в $(\overline{\Delta})$, и пусть ее параметрические уравнения такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases}$ где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — функции, определенные и непрерывные в промежутке $[p,q]$. Тогда точки, соответствующие точкам кривой (λ), имеют координаты:

$$\begin{cases} x = x(\alpha(t),\beta(t)), \\ y = y(\alpha(t),\beta(t)). \end{cases} \tag{6}$$

Так как правые части в уравнениях (6) есть функции непрерывные в промежутке $[p,q]$, как суперпозиции непрерывных функций, то заключаем, что непрерывная кривая (λ) преобразуется в непрерывную же кривую (l), лежащую в области $(\overline{D})$.

Задача. Зная область $(\overline{\Delta})$ и формулы преобразования области $(\overline{\Delta})$ в область $(\overline{D})$: $\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases}$ найти площадь $F_{\overline{D}}$ области $(\overline{D})$.

▶ Решать эту задачу будем при следующих предположениях.

1) Обе области $(\overline{\Delta})$ и $(\overline{D})$ прямыми, параллельными координатным осям, разлагаются на конечное число областей как типа I, так и типа II.

2) Контуру (K_Δ) соответствует контур (K_D), причем положительному обходу (K_Δ) соответствует определенный (положительный или отрицательный) обход (K_D).

3) Функции $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$ имеют в $(\overline{\Delta})$ непрерывные частные производные первого порядка x'_ξ, x'_η, y'_ξ, y'_η, а одна из этих функций имеет в $(\overline{\Delta})$ непрерывные смешанные производные второго порядка. Пусть, например, в $(\overline{\Delta})$ существуют и непрерывны $y''_{\xi\eta}$ и $y''_{\eta\xi}$ $(\Rightarrow y''_{\eta\xi} = y''_{\xi\eta}$ в $(\overline{\Delta}))$.

4) Определитель $J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix}$ всюду в $(\overline{\Delta})$ сохраняет знак ($J(\xi,\eta)$ — *определитель Якоби*, или *якобиан*).

Решение. Мы знаем, что $F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K_D)} x\,dy$. Выразим этот криволинейный интеграл через обыкновенный определенный интеграл. Пусть параметрические уравнения контура (K_Δ) такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — функции, определенные на $[p,q]$ и имеющие там непрерывные производные $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$. Тогда параметрические уравнения контура (K_D) будут такими:

$$\begin{cases} x = x(\alpha(t),\beta(t)), \\ y = y(\alpha(t),\beta(t)), \end{cases} \quad t \in [p,q].$$

Пусть для определенности изменению t от p до q соответствует положительный обход контура (K_D). Тогда

$$F_{\overline{D}} = \int_p^q x(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \left[y'_\xi(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t) + y'_\eta(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t)\right] dt. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь следующий криволинейный интеграл второго рода по контуру (K_Δ):

$$I = \oint_{(K_\Delta)} x(\xi, \eta) \cdot \left[y'_\xi(\xi, \eta)\, d\xi + y'_\eta(\xi, \eta)\, d\eta\right]. \quad (8)$$

Чтобы выразить I обыкновенным определенным интегралом, нужно использовать параметрические уравнения контура (K_Δ). Сделав это, мы придем в точности к интегралу, стоящему в правой части (7), если только положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу контура (K_Δ). Если же положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ), то мы получим интеграл, стоящий в правой части (7), взятый со знаком “минус”. Таким образом,

$$F_{\overline{D}} = \pm I. \quad (9)$$

Преобразуем интеграл I (см. (8)) по формуле Грина

$$\oint_{(K_\Delta)} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi d\eta.$$

У нас в I: $P = x(\xi, \eta) \cdot y'_\xi(\xi, \eta)$, $Q = x(\xi, \eta) \cdot y'_\eta(\xi, \eta)$. Значит,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= x'_\xi \cdot y'_\eta + x \cdot y''_{\eta\xi} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= x'_\eta \cdot y'_\xi + x \cdot y''_{\xi\eta} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi = J(\xi, \eta).$$

Поэтому

$$I = \iint_{(\overline{\Delta})} (x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi)\, d\xi d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

А следовательно,

$$F_{\overline{D}} = \pm \iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

У нас по условию $J(\xi, \eta)$ всюду в $(\overline{\Delta})$ сохраняет знак. Поэтому, принимая во внимание, что $F_{\overline{D}} > 0$, можем написать

$$F_{\overline{D}} = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta. \blacktriangleleft \tag{10}$$

Из рассуждений, проведенных выше, следует, что $J(\xi,\eta) > 0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу контура (K_Δ) и что $J(\xi,\eta) < 0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ).

К двойному интегралу, стоящему в правой части (10), применим частный случай теоремы о среднем. Получим.

$$F_{\overline{D}} = \left|J(\bar{\xi},\bar{\eta})\right| \cdot F_{\overline{\Delta}}, \quad \text{где} \quad (\bar{\xi},\bar{\eta}) \in (\overline{\Delta}). \tag{11}$$

Из (11) находим $\dfrac{F_{\overline{D}}}{F_{\overline{\Delta}}} = \left|J(\bar{\xi},\bar{\eta})\right|$. Станем сжимать область $(\overline{\Delta})$ по всем направлениям в некоторую точку (ξ,η) (тогда $(\bar{\xi},\bar{\eta}) \to (\xi,\eta)$). В силу непрерывности отображения область (D) будет при этом сжиматься в точку (x,y), которая соответствует точке (ξ,η). Следовательно,

$$|J(\xi,\eta)| = \lim_{F_{\overline{\Delta}} \to 0} \frac{F_{\overline{D}}}{F_{\overline{\Delta}}}.$$

Таким образом, модуль якобиана есть коэффициент искажения площадей при переходе из плоскости $O\xi\eta$ в плоскость Oxy.

Замечание. Формула (10) остается верной и в том случае, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi,\eta)$ остается ограниченным всюду в $(\overline{\Delta})$.

§6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ установлено взаимно-однозначное соответствие посредством формул $\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases}$

Считаем, что выполняются все условия, указанные при выводе формулы для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в области $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $f(x,y)$. Мы знаем, что тогда существует двойной интеграл $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$. Требуется выразить I через некоторый двойной интеграл по области $(\overline{\Delta})$.

▶ Составим интегральную сумму Римана для двойного интеграла I. Для этого произвольной сетью простых кривых нужно разбить область $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, , $(\overline{D}_n)$; в каждой части $(\overline{D}_k)$ взять произвольную точку (x_k, y_k), и тогда $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot F_{\overline{D}_k}$.

Заметим, что, проводя в $(\overline{D})$ сеть простых кривых, мы, в силу однозначности отображения, будем проводить также сеть простых кривых в области $(\overline{\Delta})$, так что $(\overline{\Delta})$ разобьется на части $(\overline{\Delta}_1)$, $(\overline{\Delta}_2)$, , $(\overline{\Delta}_n)$.

По формуле для площади плоской фигуры в криволинейных координатах, имеем

$$F_{\overline{D}_k} = \iint\limits_{(\overline{\Delta}_k)} |J(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta.$$

Применяя к двойному интегралу, стоящему в правой части, частный случай теоремы о среднем, получим

$$F_{\overline{D}_k} = \left|J(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)\right|\cdot F_{\overline{\Delta}_k}, \quad \text{где точка} \quad (\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k) \in (\overline{\Delta}_k).$$

А тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot\left|J(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)\right|\cdot F_{\overline{\Delta}_k}.$$

Было отмечено, что у нас двойной интеграл I существует. Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I$ при любом выборе точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$. В частности, в качестве точек (x_k, y_k) можно взять точки, соответствующие точкам $(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)$, т. е. положить $x_k = x(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)$, $y_k = y(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)$. При таком выборе точек (x_k, y_k) будем иметь

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k), y(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)\right)\cdot\left|J(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k)\right|\cdot F_{\overline{\Delta}_k}.$$

Сумма, стоящая здесь в правой части, есть сумма Римана для двойного интеграла

$$I_* = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\cdot\big|J(\xi,\eta)\big|\, d\xi d\eta\,,$$

причем I_* существует, ибо подынтегральная функция в нем есть функция непрерывная в $(\overline{\Delta})$.

Отметим, что, измельчая дробление в $(\overline{D})$, мы тем самым будем измельчать дробление и в $(\overline{\Delta})$, ибо функции, осуществляющие взаимно-однозначное отображение областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ друг на друга, есть непрерывные функции. Но тогда $\sigma \to I_*$ при $\lambda \to 0$. А так как $\sigma \to I$ при $\lambda \to 0$, то получаем $I = I_*$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)\cdot\big|J(\xi,\eta)\big|\, d\xi d\eta\,. \qquad (1)$$

Частный случай. Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и, следовательно, формула (1) примет вид

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi.$$

Замечание. Формула (1) остается верной и тогда, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi,\eta)$ остается ограниченным всюду в $(\overline{\Delta})$.

§7. Примеры

Пример 1 (интеграл Эйлера). Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (попутно будет доказана сходимость этого несобственного интеграла).

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ и области $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, где

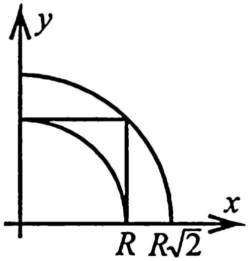


Рис. 9.29.
К вычислению интеграла Эйлера

$(\overline{D}_1)$ — четверть круга $x^2+y^2 \le R^2$, лежащая в первой четверти;

$(\overline{D}_2)$ — квадрат $\begin{cases} 0 \le x \le R, \\ 0 \le y \le R; \end{cases}$

$(\overline{D}_3)$ — четверть круга $x^2+y^2 \le 2R^2$, лежащая в первой четверти.

Ясно, что $(\overline{D}_1) \subset (\overline{D}_2) \subset (\overline{D}_3)$. Отсюда и из того, что $f(x,y) > 0$ следует:

$$\underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_1)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_1} \le \underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_2)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_2} \le \underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_3)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_3}. \qquad (2)$$

Выразим двойной интеграл I_2 через повторный.

$$I_2 = \iint\limits_{(\overline{D}_2)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R e^{-x^2-y^2}dy = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx \int\limits_0^R e^{-y^2}dy =$$

$$= \left(\int\limits_0^R e^{-y^2}dy\right)\left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right) = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Вычисление двойных интегралов I_1, I_3 будем производить, переходя к полярным координатам. Будем иметь

$$I_1 = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{(\Delta_1)} e^{-r^2} r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2} r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^R e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^R e^{-r^2}dr^2 = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right);$$

$$I_3 = \iint\limits_{(\overline{D}_3)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} r\,dr = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Теперь неравенство (2) может быть записано в виде

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \le \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \le \int_0^R e^{-x^2}dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $R \to +\infty$. Так как

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то по теореме о сжатой переменной заключаем, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак, получили $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Легко показать, что $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Пример 2. В интеграле $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\overline{D})$ — круг $x^2+y^2 \le ax$ ($a>0$).

Решение. $x^2+y^2 \le ax \iff \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4} \Rightarrow (\overline{D})$ — круг радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Положим $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Окружность $x^2+y^2=ax$ в полярных координатах задается уравнением $r^2 = ar\cos\varphi \Rightarrow r = a\cos\varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Якобиан $J(r,\varphi) = r$.

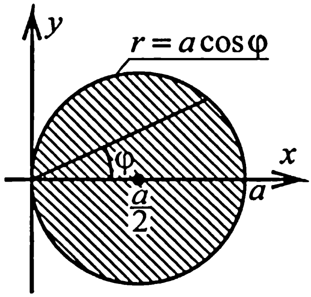


Рис. 9.30. К примеру 2

Если внешнее интегрирование производить по φ, то промежутком изменения φ будет $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Взяв произвольное значение φ из промежутка

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, видим по рис. 9.30, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\cos\varphi$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\,.$$

Пример 3. В интеграле $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\overline{D})$ — параболический сегмент $\begin{cases} -a \le x \le a, \\ \dfrac{x^2}{a} \le y \le a. \end{cases}$

Решение. В полярных координатах отрезок прямой $y = a$, $-a \le x \le a$, определяется уравнением $r = \dfrac{a}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, а кусок параболы $y = \dfrac{x^2}{a}$, $x \in [-a, a]$, — уравнением $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Будем производить внешнее интегрирование по φ. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, видим по рис. 9.31, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Взяв

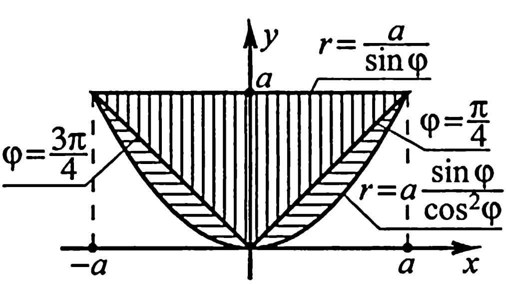


Рис. 9.31. К примеру 3

произвольное значение φ из промежутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = \frac{a}{\sin\varphi}$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Будем, следовательно, иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

Пример 4. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$ При замене $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ $J(r,\varphi) = r$.

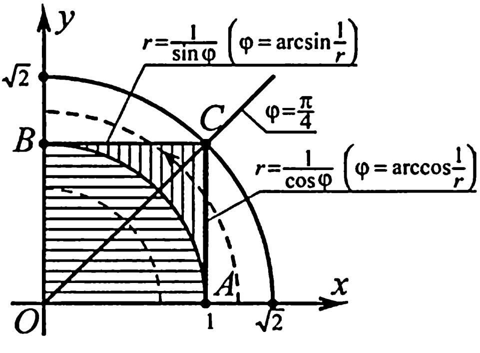


Рис. 9.32. К примеру 4

$$\text{Отрезок } OA = \begin{cases} y = 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } OB = \begin{cases} x = 0, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } AC = \begin{cases} x = 1, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos\dfrac{1}{r}, \\ 1 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } BC = \begin{cases} y = 1, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sin\varphi}, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arcsin\dfrac{1}{r}, \\ 1 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

I. Если внешнее интегрирование производить по φ, то будем иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

II. Будем производить теперь внешнее интегрирование по r. Взяв произвольное значение r из промежутка $[0,1]$, видим по рис. 9.32, что φ изменяется от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Взяв произвольное значение r из промежутка $\left[1, \sqrt{2}\right]$, видим, что φ изменяется от $\varphi = \arccos\dfrac{1}{r}$ до $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{r}$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_0^1 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\varphi=\arccos\frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi.$$

Пример 5. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} f(x,y)\, dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2. \end{cases}$ Делаем замену $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$ $J(r,\varphi) = r$.

Отрезок $OA = \begin{cases} y = 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$

Отрезок $AB = \begin{cases} x = 1, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos\dfrac{1}{r}, \\ 1 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$

$$\smile OCB = \begin{cases} y = x^2, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}, \\ 0 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$(y = x^2 \;\Rightarrow\; r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \;\Rightarrow\; r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

имеем также

$$r\sin\varphi = r^2(1-\sin^2\varphi) \;\Rightarrow\; r\sin^2\varphi + \sin\varphi - r = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r^2}}{2r} \;\Rightarrow$$

так как $\sin\varphi \ge 0$ для $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r},\ r \in \left[0, \sqrt{2}\right],$$

$\varphi(r)$ в точке $r = 0$ понимается в предельном смысле, $\varphi(0) = 0$).

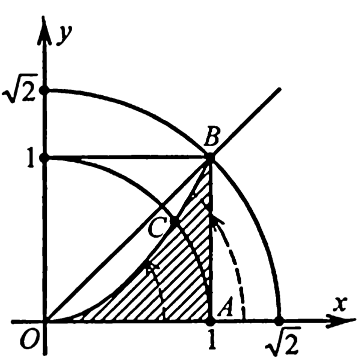


Рис. 9.33. К примеру 5

I. Будем производить внешнее интегрирование по φ. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ видим по рис. 9.33, что r изменяется от $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ до $r = \frac{1}{\cos\varphi}$. Поэтому будем иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{r=\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

II. Станем производить теперь внешнее интегрирование по r. Взяв произвольное значение r из промежутка $[0, 1]$, видим по рис. 9.33, что φ изменяется от $\varphi = 0$ до $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$.

Взяв произвольное значение r из промежутка $\left[1, \sqrt{2}\right]$, видим по рис. 9.33, что φ изменяется от $\varphi = \arccos\frac{1}{r}$ до $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_0^1 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\varphi=\arccos\frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi.$$

Пример 6. Переменить порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\, dr.$$

Решение. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le a\sqrt{\sin 2\varphi}. \end{cases}$ Из соотношения $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$

$\Rightarrow \quad r^2 = a^2 \sin 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin 2\varphi = \dfrac{r^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = \arcsin \dfrac{r^2}{a^2} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{r^2}{a^2}$, $r \in [0, a]$. Требуется произвести внешнее интегрирование по r.

Возьмем произвольное значение r из промежутка $[0, a]$. Из рис. 9.34 видим, что φ будет изменяться при этом r от значения $\varphi = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{r^2}{a^2}$ до значения $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{r^2}{a^2}$. Следовательно, будем иметь

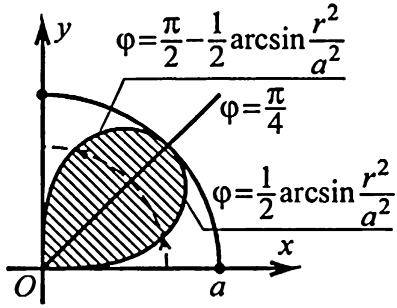


Рис. 9.34. К примеру 6

$$I = \int_0^a dr \int_{\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\, d\varphi.$$

Пример 7. В двойном интеграле $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$, где $(\overline{D})$ — область, ограниченная линиями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, сделать замену переменных по формулам $\begin{cases} x = u\cos^4 v, \\ y = u\sin^4 v. \end{cases}$

Решение. При такой замене:

1) линия $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ перейдет в линию $\sqrt{u}\cdot\cos^2 v + \sqrt{u}\cdot\sin^2 v = \sqrt{a}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{u} = \sqrt{a}$ $\Rightarrow$ $u = a$ (рис. 9.35, 9.36);

2) линия $\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x \le a \end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u\sin^4 v = 0, \\ 0 < u\cos^4 v \le a \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v = 0, \\ 0 < u \le a; \end{cases}$

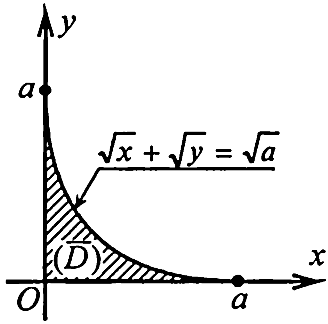


Рис. 9.35. К примеру 7

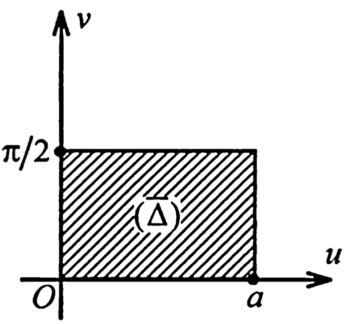


Рис. 9.36. К примеру 7

3) линия $\begin{cases} x=0, \\ 0<y\le a \end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u\cos^4 v=0, \\ 0<u\sin^4 v\le a \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v=\dfrac{\pi}{2}, \\ 0<u\le a; \end{cases}$

4) точка $O(0,0)$ перейдет в линию $\begin{cases} u\cos^4 v=0, \\ u\sin^4 v=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $u=0$.

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v \end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v.$$

Следовательно,

$$I=4\int_0^a u\,du\int_{v=0}^{v=\pi/2} f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\sin^3 v\cos^3 v\,dv.$$

Пример 8. Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл $I=\iint\limits_{(\overline{D})} f(x\cdot y)\,dxdy$, где $(\overline{D})$ — область, ограниченная линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ ($x>0$, $y>0$), к однократному.

Решение. Делаем замену переменных:

$$\begin{cases} xy=u, \\ \dfrac{y}{x}=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y=\sqrt{uv} \end{cases} \quad (u>0,\ v>0,\ \text{ибо } x>0,\ y>0).$$

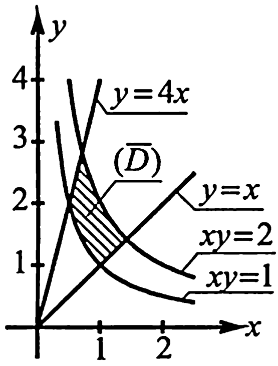


Рис. 9.37. К примеру 8

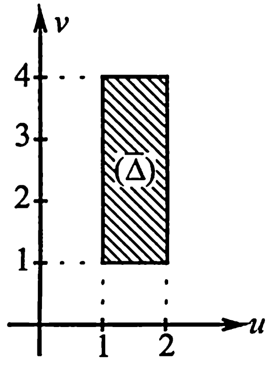


Рис. 9.38. К примеру 8

При такой замене:

1) линия $xy = 1$ перейдет в линию $u = 1$;

2) линия $xy = 2$ перейдет в линию $u = 2$;

3) линия $y = x$ перейдет в линию $v = 1$;

4) линия $y = 4x$ перейдет в линию $v = 4$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Будем иметь, следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{v=1}^{v=4} f(u)\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=2} f(u)\left[\ln v\right]_{v=1}^{v=4} du = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(u)\,du.$$

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Решение. Делаем замену переменных $\begin{cases} x - y = u, \\ x = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v, \\ y = v - u. \end{cases}$

При такой замене линия $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$ перейдет в линию $u^2 + v^2 = a^2$. Это — окружность радиуса a с центром в точке $(0, 0)$.

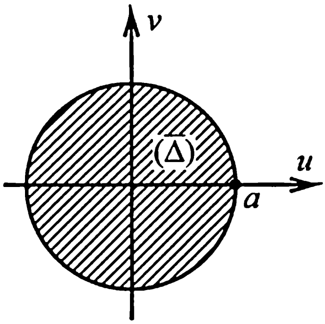


Рис. 9.39. К примеру 9

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Искомая площадь F фигуры, ограниченной линией $(x-y)^2+x^2=a^2$ ($a>0$) будет равна

$$F=\iint\limits_{(\overline{D})} dxdy=\iint\limits_{(\overline{\Delta})} |J(u,v)|\,dudv=$$

$$=\iint\limits_{(\overline{\Delta})} dudv=\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2);\quad x^2+y^2\ge a^2.$$

Решение. Переходим к полярным координатам $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$

В полярной системе координат линия $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ будет иметь уравнение $r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (это — лемниската), а линия $x^2+y^2=a^2$ — уравнение $r=a$ (это — окружность). Найдем точки пересечения этих линий. Для этого нужно решить систему:

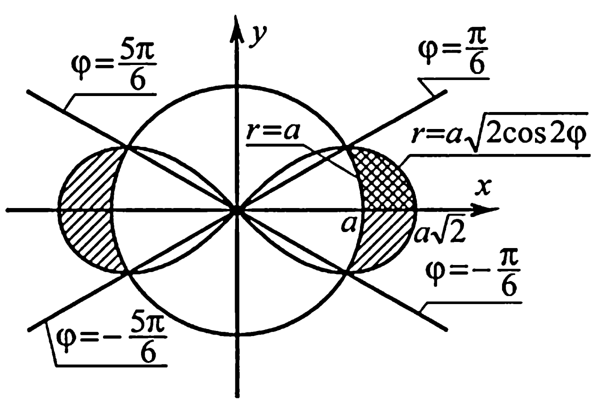


Рис. 9.40. К примеру 10

$$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \\ r = a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2\cos 2\varphi} = 1 \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6};\ \varphi = \pm\frac{5\pi}{6}.$$

Принимая во внимание симметричность фигуры, станем вычислять площадь ее части, расположенной в первой четверти. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, видим из рис. 9.40, что r при этом φ изменяется от значения $r = a$ до значения $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Будем иметь, следовательно,

$$\frac{1}{4}F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2\cos 2\varphi - a^2)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}\cdot a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$; $y^2 = 2qx$; $x^2 = 2ry$; $x^2 = 2sy$ $(0 < p < q;\ 0 < r < s)$.

Решение. Делаем замену переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} = u, \\ \dfrac{x^2}{y} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{1/3}\cdot v^{2/3}, \\ y = u^{2/3}\cdot v^{1/3}. \end{cases}$$

При такой замене:

1) ветвь параболы $y^2 = 2px$ перейдет в прямую линию $u = 2p$;

2) ветвь параболы $y^2 = 2qx$ перейдет в прямую линию $u = 2q$;

3) ветвь параболы $x^2 = 2ry$ перейдет в прямую линию $v = 2r$;

4) ветвь параболы $x^2 = 2sy$ перейдет в прямую линию $v = 2s$.

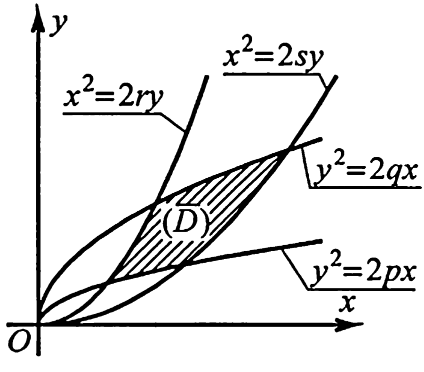


Рис. 9.41. К примеру 11

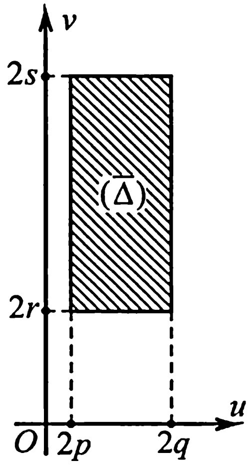


Рис. 9.42. К примеру 11

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad |J(u,v)|=\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$F=\iint\limits_{(\overline{D})}dxdy=\iint\limits_{(\overline{\Delta})}|J(u,v)|\,dudv=\frac{1}{3}\int\limits_{2p}^{2q}du\int\limits_{2r}^{2s}dv=\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$(l_1):\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1;\quad (l_2):\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4;$$

$$(l_3):\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b};\qquad (l_4):\ 8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (x>0,\ y>0).$$

Решение. Делаем замену переменных: $\begin{cases}x=au\cos^3 v,\\ y=bu\sin^3 v.\end{cases}$ При такой замене:

1) линия (l_1) перейдет в линию $u^{2/3}=1\ \Rightarrow\ u=1$;

2) линия (l_2) перейдет в линию $u^{2/3}=4\ \Rightarrow\ u=8$;

3) линия (l_3) перейдет в линию $\operatorname{tg}^3 v=1\ \Rightarrow\ v=\frac{\pi}{4}$;

4) линия (l_4) перейдет в линию $\operatorname{tg}^3 v = 8 \;\Rightarrow\; v = \operatorname{arctg} 2$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^3 v & -3au\cos^2 v\sin v \\ b\sin^3 v & 3bu\sin^2 v\cos v \end{vmatrix} =$$

$$= 3abu\sin^2 v\cos^2 v.$$

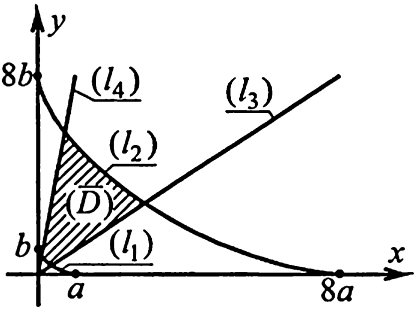


Рис. 9.43. К примеру 12

Имеем, следовательно,

$$F = \iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} 3abu\sin^2 v\cos^2 v\,dudv =$$

$$= 3ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2} \sin^2 v\cos^2 v\,dv\int\limits_{u=1}^{u=8} u\,du =$$

$$= \frac{3\cdot 63}{2}ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2}\sin^2 v\cos^2 v\,dv = \frac{189}{2}ab\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2}\sin^2 2v\,dv =$$

$$= \frac{189}{8}ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2}\frac{1-\cos 4v}{2}dv = \frac{189}{16}ab\left[\left(\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\sin 4v\Big|_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2}\right] =$$

$$= \frac{189}{16}ab\left[(\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1) - \frac{1}{4}\sin(4\operatorname{arctg}2)\right].$$

Так как $\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\sin(4\operatorname{arctg}2) = -\frac{24}{25}$, то

$$F = \frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right) \;(\textit{кв. ед.}).$$

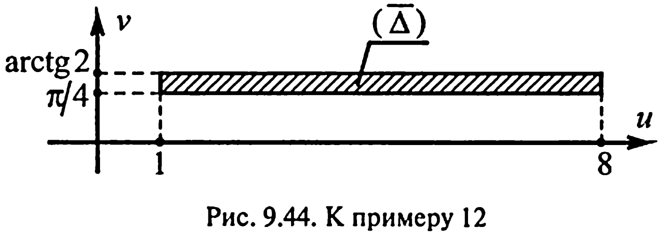


Рис. 9.44. К примеру 12

Глава 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§1. Некоторые сведения из геометрии

1.°Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой.

Определение. *Касательной* в точке N к пространственной кривой (l) называется предельное положение секущей, проходящей через точку N и какую-нибудь точку M этой кривой, когда точка M по кривой стремится к совпадению с точкой N.

Пусть кривая (l) задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [p,q]. \\ z = \omega(t), \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют в $[p,q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

Пусть точка $N(x_0,y_0,z_0)$ соответствует значению параметра t_0, а точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ — значению параметра $t_0+\Delta t$, так что $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $z_0=\omega(t_0)$; $x_0+\Delta x = \varphi(t_0+\Delta t)$, $y_0+\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)$, $z_0+\Delta z=\omega(t_0+\Delta t)$. Составляем уравнение секущей NM как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{y-y_0}{(y_0+\Delta y)-y_0} = \frac{z-z_0}{(z_0+\Delta z)-z_0}$$

(x, y, z — текущие координаты), или

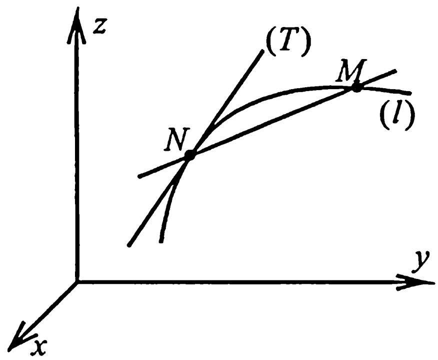


Рис. 10.1. К определению касательной к пространственной кривой

$$\frac{x-x_0}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega(t_0+\Delta t)-\omega(t_0)}.$$

Разделив знаменатели этих отношений на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение касательной к (l) в точке N.

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{2}$$

Из (2) видим, что вектор $\vec{\tau}(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ направлен по касательной к кривой (l) в точке N.

Замечание. Уравнения (2) теряют смысл, если $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=$ $=\omega'(t_0)=0$. В этом случае точка N называется *особой*. Если же хотя бы один из знаменателей в соотношении (2) не равен нулю, то точка N называется *обыкновенной*. В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные точки.

Определение. *Нормальной плоскостью* к кривой (l) в точке N называется плоскость, проходящая через точку N перпендикулярно касательной к (l) в точке (N).

Найдем уравнение нормальной плоскости. Для этого берем уравнение связки плоскостей с центром в точке $N(x_0,y_0,z_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3}$$

По определению, нормальная плоскость перпендикулярна касательной к (l) в точке N. Поэтому $\dfrac{A}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{B}{\psi'(t_0)}=\dfrac{C}{\omega'(t_0)}$ $(=k)$, k — обозначение общей величины этих отношений. А тогда

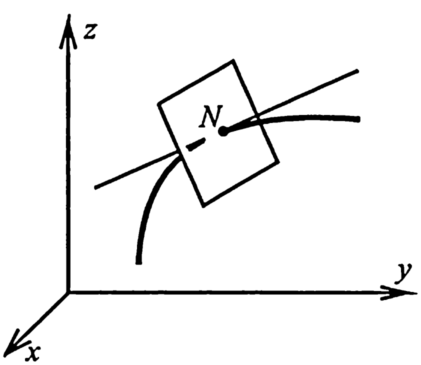


Рис. 10.2. К определению нормальной плоскости к пространственной кривой

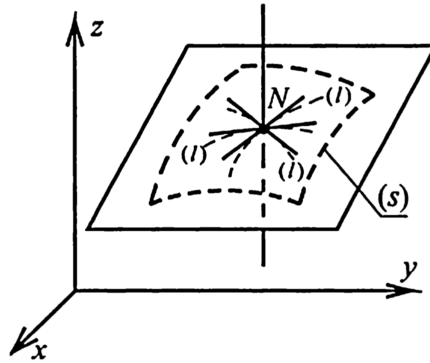


Рис. 10.3. К определению касательной плоскости и нормали к поверхности

$$A = k \cdot \varphi'(t_0), \qquad B = k \cdot \psi'(t_0), \qquad C = k \cdot \omega'(t_0).$$

Подставив эти выражения для A, B и C в (3), получим уравнение нормальной плоскости к (l) в точке N:

$$\varphi'(t_0) \cdot (x - x_0) + \psi'(t_0) \cdot (y - y_0) + \omega'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

2°. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение. Пусть дана поверхность (s) и пусть точка $N(x_0, y_0, z_0) \in (s)$. Рассмотрим всевозможные кривые, лежащие на (s) и проходящие через точку N. Проведем к этим кривым в точке N касательные прямые. Если геометрическим местом этих касательных прямых оказывается плоскость, то она называется *касательной плоскостью* к поверхности (s) в точке N, а перпендикуляр к этой плоскости в точке N называется *нормалью* к поверхности (s) в точке N.

Пусть данная поверхность (s) имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (5)$$

Предполагаем, что функция $F(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z в некоторой пространственной области. Точки поверхности (s), в которых одновременно $F'_x(x, y, z) = 0$, $F'_y(x, y, z) = 0$, $F'_z(x, y, z) = 0$, называются *особыми* точками. Остальные точки поверхности (s) называются *обыкновенными.*

Пусть точка $N(x_0,y_0,z_0)$ — обыкновенная точка поверхности (s). Рассмотрим одну из кривых (l), лежащую на (s) и проходящую через точку $N(x_0,y_0,z_0)$. Пусть параметрические уравнения этой кривой (l) такие:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [p,q], \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ определены и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$ в промежутке $[p,q]$.

Пусть точка $N(x_0,y_0,z_0)$ соответствует значению параметра t_0. Уравнение касательной к (l) в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ будет таким:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{6}$$

Мы докажем, что у данной поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость, если покажем, что касательная прямая к любой кривой (l), проходящей через точку N, перпендикулярна к некоторой определенной прямой.

Так как вся кривая (l) лежит на поверхности (s), то при всех $t \in [p,q]$ будет

$$F\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big) = 0. \tag{7}$$

Значит, (7) есть тождество относительно t. Продифференцируем это тождество по t. Получим

$$F'_x\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\varphi'(t) + F'_y\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\psi'(t) + \\ + F'_z\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\omega'(t) = 0.$$

Положим в этом соотношении $t = t_0$. Получим

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(t_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\psi'(t_0) + \\ + F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\omega'(t_0) = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) представляет собой условие перпендикулярности двух прямых, а именно: прямой (6) (т. е. касательной к (l) в точке N) и прямой, имеющей уравнение

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{9}$$

Ясно, что прямая (9) не зависит от выбора кривой (l). Она зависит только от поверхности (s) и от положения точки N на (s). Значит, касательная прямая к любой кривой (l), лежащей на (s) и проходящей через точку $N(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярна к одной и той же прямой (9). Следовательно, у поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость.

Нетрудно понять, что прямая (9) является нормалью к поверхности (s) в точке N.

Выведем теперь уравнение касательной плоскости к (s) в точке N. Для этого возьмем уравнение связки плоскостей с центром в точке N:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{10}$$

Так как касательная плоскость к (s) в точке N перпендикулярна нормали (9), то

$$\frac{A}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{B}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{C}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \quad (= \tilde{k}),$$

$\tilde{k}$ — обозначение общей величины этих отношений. А тогда

$$A = \tilde{k} \cdot F'_x(x_0,y_0,z_0), \quad B = \tilde{k} \cdot F'_y(x_0,y_0,z_0), \quad C = \tilde{k} \cdot F'_z(x_0,y_0,z_0).$$

Подставив эти выражения для A, B и C в (10), получим уравнение касательной плоскости к поверхности (s) в точке N:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{11}$$

Частный случай. Пусть поверхность (s) задана явным уравнением:

$$z = f(x,y), \tag{12}$$

где $f(x,y)$ — непрерывная вместе со своими частными производными $p(x,y) = f'_x(x,y)$ и $q(x,y) = f'_y(x,y)$. Отметим, что у такой поверхности все точки обыкновенные. В самом деле, запишем уравнение (12) в виде $f(x,y) - z = 0$. Это есть уравнение вида (5), где $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Поэтому $F'_x(x,y,z) = f'_x(x,y)$, $F'_y(x,y,z) = f'_y(x,y)$, $F'_z = -1$ $(\neq 0)$. Уравнение касательной плоскости в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12), будет таким:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{13}$$

Уравнение нормали в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12),

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{14}$$

Если α, β, γ — углы, которые нормаль к поверхности (s) образует с осями координат, то

$$\cos\alpha = \frac{f'_x}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{f'_y}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}. \tag{15}$$

Выбор знака перед радикалом означает выбор определенного направления на нормали. Если нам нужно, например, направление, которое составляет с осью Oz острый угол, то должно быть $\cos\gamma > 0$ и, следовательно, в формулах (15) перед радикалом нужно взять знак минус.

Замечание. Пусть кривая (l) задана пересечением двух поверхностей, т. е. системой $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ \Phi(x,y,z) = 0. \end{cases}$ Касательную прямую к этой кривой в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ можно получить как пересечение касательных плоскостей, проведенных к данным поверхностям в точке N. Следовательно, уравнение этой касательной прямой будет таким:

$$\begin{cases} F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \\ \Phi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\Phi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\Phi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{16}$$

§2. Существование площади кривой поверхности и ее вычисление

1°. Рассмотрим поверхность (s), заданную явным уравнением

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

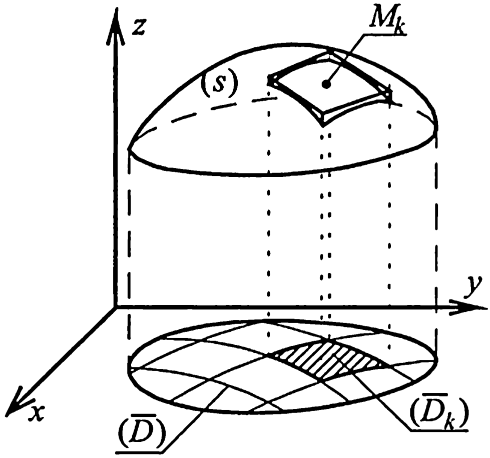


Рис. 10.4. К вычислению площади кривой поверхности

где $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной простым контуром.

Разобьем $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, , $(\overline{D}_n)$ с площадями $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Рассмотрим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси Oz, а направляющими служат простые кривые, разбивающие на части $(\overline{D})$. Эти цилиндрические поверхности переносят дробящую сеть с $(\overline{D})$ на (s). Поэтому поверхность (s) разобьется на части (s_1), (s_2), , (s_n). На каждой части (s_k) берем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и проводим в этих точках плоскости, касательные к поверхности (s). Продолжим упомянутые выше цилиндрические поверхности до пересечения с построенными касательными плоскостями. Тогда на этих плоскостях вырежутся плоские области $(\tilde{s}_1)$, $(\tilde{s}_2)$, $\cdots$, $(\tilde{s}_n)$. Пусть площади их будут: $T_1, T_2, \ldots, T_n$ соответственно. Обозначим через λ ранг дробления области $(\overline{D})$. Покажем, что существует конечный предел $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$, не зависящий ни от выбора дробящей сети, ни от выбора точек M_k на (s_k). Этот предел и принимается за площадь s поверхности (s).

▶ Заметим, что области $(\overline{D}_k)$ являются проекциями $(\tilde{s}_k)$ на плоскость Oxy. Значит, площади их связаны так: $F_k = T_k \cdot \cos\psi_k$, где ψ_k — угол между плоскостью Oxy и плоскостью, касательной к поверхности (s) в точке M_k. Но угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Поэтому $\psi_k = \gamma_k$, где γ_k — угол между осью Oz и нормалью к поверхности (s) в точке M_k. А тогда

$$\cos\psi_k = \cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2}}$$

(заметим, что нам нужен положительный косинус). И, следовательно,

$$T_k = \frac{F_k}{\cos\psi_k} = \sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2} \cdot F_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2} \cdot F_k . \qquad (2)$$

Видим, что сумма (2) есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла по области $(\overline{D})$ от непрерывной в $(\overline{D})$ функции $\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}$. Значит, у суммы (2) существует при $\lambda \to 0$ конечный предел, не зависящий ни от выбора дробящей сети области $(\overline{D})$, ни от выбора точек M_k на (s_k), а это и требовалось доказать. Попутно установлено, что

$$s = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}\, dxdy . \qquad (3)$$

Замечание. Формулу (3) для площади s кривой поверхности можно записать в виде

$$s = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \qquad (4)$$

где γ — острый угол между нормалью к поверхности (s) и осью Oz. Если на нормали к (s) направление не выбрано нужным образом, то вместо (4) следует писать

$$s = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \tag{5}$$

2°. Случай, когда поверхность задана параметрическими уравнениями.

Рассмотрим теперь поверхность (s), заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{6}$$

где $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ есть функции, заданные в области $(\overline{\Delta})$ плоскости Ouv, непрерывные там и имеющие непрерывные частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

и рассмотрим следующие определители, составленные из элементов этой матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Предположим, что один из этих трех определителей, например, C, всюду в $(\overline{\Delta})$ отличен от нуля. ($C \neq 0$ всюду в $(\overline{\Delta})$.)

Возьмем первые два уравнения из системы (6). При условии, что $C \neq 0$ в $(\overline{\Delta})$, система $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ однозначно разрешима относительно u и v, т. е. $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$ причем функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ будут определены, непрерывны и иметь непрерывные частные производные $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$, $v'_x(x,y)$, $v'_y(x,y)$ в некоторой области $(\overline{D})$ плоскости Oxy (см. теорию функций, заданных неявно). Подставив выражения для u и v через x и y в соотношение $z = z(u,v)$ из (6), получим

$$z = z(u(x,y), v(x,y)), \text{ т. е. } z = f(x,y).$$

Отметим, что функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$. Видим, таким образом, что поверхность (s), заданная параметрическими уравнениями (6), представляет собой поверхность как раз такого типа, который был рассмотрен выше в 1°.

Было показано, что у такой поверхности есть площадь s, причем $s = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ (см. (5)). В двойном интеграле, выражающем площадь поверхности (s), сделаем замену переменных, взяв в качестве новых переменных параметры u и v, т. е. положив $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in (\overline{\Delta})$. Получим $s = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \frac{|J(u,v)|}{|\cos\gamma|} dudv$. У нас $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = C$. Поэтому

$$s = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \frac{|C|}{|\cos\gamma|} dudv. \qquad (7)$$

В двойном интеграле (7) следует выразить $|\cos\gamma|$ через переменные u и v. Для этого на поверхности (s) выберем и закрепим произволь-

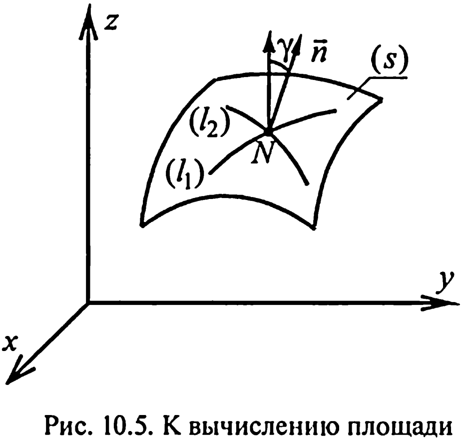


Рис. 10.5. К вычислению площади кривой поверхности, заданной параметрическими уравнениями

ную точку $N(x_0,y_0,z_0)$, соответствующую точке $(u_0,v_0)\in(\overline{\Delta})$. Проведем в этой точке нормаль $\vec{n}$ к поверхности (s). Пусть α, β, γ — углы, которые нормаль $\vec{n}$ образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Проведем на поверхности (s) через точку N кривую (l_1):

$$(l_1)=\begin{cases}x=x(u,v_0),\\ y=y(u,v_0),\\ z=z(u,v_0)\end{cases}$$

(это — линия, ибо параметр один). Вектор $\vec{\tau}_1\big(x_u'(u_0,v_0),y_u'(u_0,v_0),z_u'(u_0,v_0)\big)$ направлен по касательной к (l_1) в точке N. Так как линия (l_1) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N, то $\vec{\tau}_1\perp\vec{n}$. Поэтому

$$x_u'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_u'(u_0,v_0)\cos\beta+z_u'(u_0,v_0)\cos\gamma=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x_u'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_u'(u_0,v_0)\cos\beta=-z_u'(u_0,v_0)\cos\gamma. \qquad (8)$$

Затем на поверхности (s) через точку $N(x_0,y_0,z_0)$ проводим кривую

$$(l_2)=\begin{cases}x=x(u_0,v),\\ y=y(u_0,v),\\ z=z(u_0,v).\end{cases}$$

Вектор $\vec{\tau}_2\big(x_v'(u_0,v_0),y_v'(u_0,v_0),z_v'(u_0,v_0)\big)$ направлен по касательной к (l_2) в точке N. Так как (l_2) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N, то $\vec{\tau}_2\perp\vec{n}$. Поэтому

$$x_v'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_v'(u_0,v_0)\cos\beta+z_v'(u_0,v_0)\cos\gamma=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x_v'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_v'(u_0,v_0)\cos\beta=-z_v'(u_0,v_0)\cos\gamma. \qquad (9)$$

Из системы

$$\begin{cases}x_u'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_u'(u_0,v_0)\cos\beta=-z_u'(u_0,v_0)\cos\gamma,\\[2ex] x_v'(u_0,v_0)\cos\alpha+y_v'(u_0,v_0)\cos\beta=-z_v'(u_0,v_0)\cos\gamma\end{cases}$$

найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma & y'_u(u_0,v_0) \\ -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos\gamma\cdot\begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{A}{C}\cos\gamma;$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma \\ x'_v(u_0,v_0) & -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos\gamma\cdot\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{B}{C}\cos\gamma.$$

Можем написать также, что $\cos\gamma = \frac{C}{C}\cos\gamma$. Известно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. А тогда

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}\cdot\cos^2\gamma = 1 \quad\Rightarrow\quad |\cos\gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Подставляя это выражение для $|\cos\gamma|$ в (7), находим

$$s = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \tag{10}$$

Замечание 1. Из формулы (10) для площади s поверхности видим, что на окончательном результате не отразилось, что отличен от нуля именно определитель C, а не A или B. Точно такое же выражение для s мы получили бы, предполагая, что в $(\overline{\Delta})$ отличен от нуля либо определитель A, либо определитель B. Поэтому формула (10) верна и тогда, когда область $(\overline{\Delta})$ разлагается на конечное число частей, в каждой из которых отличен от нуля хотя бы один из трех определителей: A, B, C.

Замечание 2. Положим

$$(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = E,$$
$$(x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = G,$$
$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F$$

(E, G, F — это так называемые *коэффициенты Гаусса*). Легко проверить, что $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$. Поэтому

$$s = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv. \qquad (11)$$

§3. Примеры

Пример 1. Найти площадь s поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. На рис. 10.6 изображена часть интересующей нас поверхности, расположенная в первом октанте. Эта часть поверхности состоит из двух одинаковых по площади кусков. Один из этих кусков определяется уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ и проектируется на плоскость Oxy в треугольник $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le x. \end{cases}$ Площадь $\tilde{s}$ этого куска поверхности можно определить по формуле $\tilde{s} = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$. Имеем $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$. Следовательно,

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}.$$

А тогда

$$\tilde{s} = a\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int\limits_{y=0}^{y=x} dy = a\int\limits_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_{x=0}^{x=a} = a^2.$$

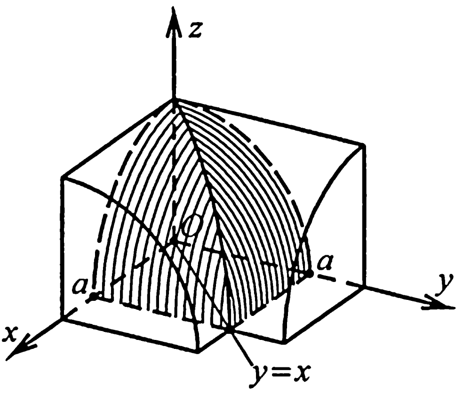


Рис. 10.6. К примеру 1

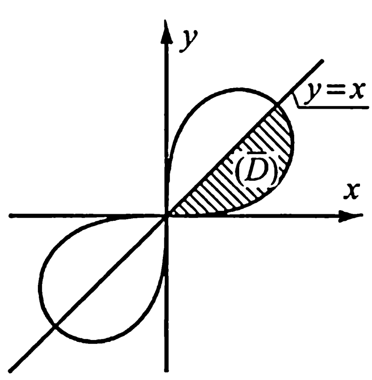


Рис. 10.7. К примеру 2

Так как $\tilde{s}$ составляет лишь $\frac{1}{16}$ часть площади s, то находим

$$s = 16a^2 \ (кв.\ ед.).$$

Пример 2. Найти площадь s части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Решение. Поверхность $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ — параболоид вращения.

Ось Oz является осью симметрии этого параболоида вращения. Цилиндрическая поверхность $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ — симметрична относительно плоскости $y = x$. Она пересекается с плоскостью Oxy по кривой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Одна четвертая часть куска поверхности, вырезаемая цилиндром из параболоида вращения, проектируется на плоскость Oxy в область $(\overline{D})$, ограниченную линиями: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. (см. рис. 10.7) Имеем

$$z'_x = \frac{x}{a};\ z'_y = \frac{y}{a};\ \Rightarrow\ 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{4}{a} \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам. Будем иметь

$$S = \frac{4}{a} \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{a^2 + r^2}\, r\, dr = \frac{4}{3a} \int\limits_0^{\pi/4} (a^2 + r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \left((1 + \sin 2\varphi)^{3/2} - 1\right) d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \left(\int\limits_0^{\pi/4} (\sin\varphi + \cos\varphi)^3\, d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sin^3\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)d\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).\ (\textit{кв. ед.}).$$

Пример 3. Найти площадь s части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

Решение. Пусть ρ, φ, θ — сферические координаты точек пространства. Декартовы и сферические координаты точки пространства связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Координаты любой точки сферы радиуса R будут такими:

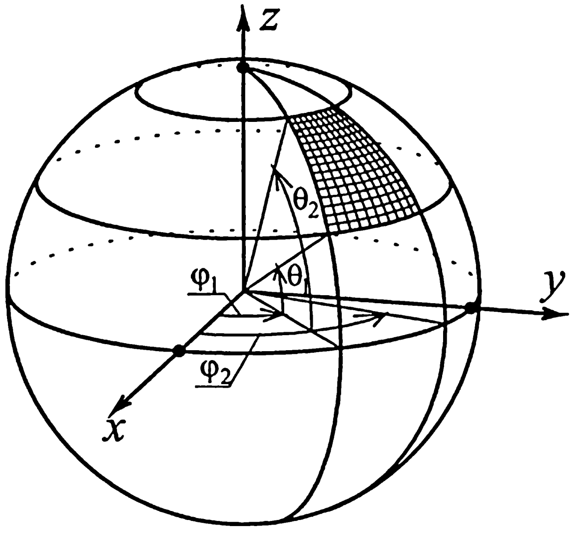


Рис. 10.8. К примеру 3

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta. \end{cases}$$

Последние уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения интересующего нас куска сферы, если $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$; $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Имеем

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = R^2\cos^2\theta, \quad G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = R^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = R^2\cos\theta.$$

Следовательно,

$$s = \iint\limits_{\substack{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2}} R^2\cos\theta\, d\varphi d\theta = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \ (\textit{кв. ед.}).$$

Пример 4. Найти площадь части поверхности тора

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi, \quad (0 < a \le b), \\ z = a\sin\theta \end{cases}$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ и двумя параллелями $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$. Чему равна поверхность всего тора?

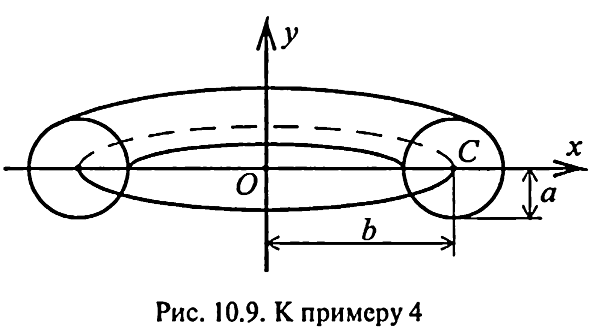


Рис. 10.9. К примеру 4

Решение. Найдем коэффициенты Гаусса данной поверхности. Имеем

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b+a\cos\theta)\sin\varphi & (b+a\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = (b+a\cos\theta)^2,$$

$$G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG-F^2} = a(b+a\cos\theta).$$

$$s = \iint\limits_{\substack{\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\\ \theta_1\le\theta\le\theta_2}} \sqrt{EG-F^2}\, d\varphi d\theta = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b+a\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= a(\varphi_2-\varphi_1)\cdot(b\theta + a\sin\theta)\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} =$$

$$= a(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\left[b(\theta_2-\theta_1) + a(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\right] \ (\textit{кв. ед.}).$$

Чтобы найти площадь поверхности всего тора, нужно в полученное выражение для s подставить значения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$. Получим

$$s_{\text{полн.}} = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab \ (\textit{кв. ед.}).$$

Глава 11

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Поверхностные интегралы первого рода

1. Определение. Пусть в пространстве имеется квадрируемая поверхность (S), на которой задана ограниченная функция $\Phi(x,y,z)$. Проделаем следующие операции.

1. Разбиваем (S) на квадрируемые части (S_1), (S_2), $\cdots$, (S_n) с площадями S_1, S_2, $\cdots$, S_n. Пусть d_k — диаметр (S_k). $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{d_k\}$ (λ — ранг дробления).

2. В каждой части (S_k), $k=\overline{1,n}$, берем произвольную точку (x_k,y_k,z_k) и вычисляем в ней значение функции Φ, т. е. находим $\Phi(x_k,y_k,z_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на площадь S_k соответствующей части поверхности: $\Phi(x_k,y_k,z_k)\cdot S_k$, $k=\overline{1,n}$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\Phi(x_k,y_k,z_k)\cdot S_k$$

(σ — интегральная сумма Римана). Отметим, что значение суммы σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения поверхности (S) на части (S_k), $k=\overline{1,n}$, так и от выбора точки (x_k,y_k,z_k) на (S_k).

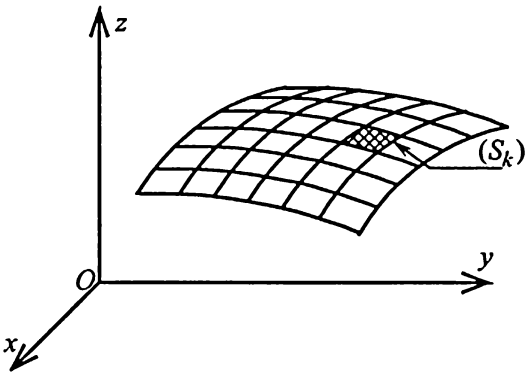


Рис. 11.1. К определению поверхностного интеграла первого рода

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения поверхности (S) на части (S_k), ни от способа выбора точек (x_k, y_k, z_k) на (S_k), то его называют *поверхностным интегралом первого рода* от функции $\Phi(x,y,z)$ по поверхности (S) и обозначают символом

$$I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS\,. \tag{1}$$

2°. Теорема (о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода).

1. Пусть поверхность (S) задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

где $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ есть функции, заданные в области $(\bar{\Delta})$ плоскости Ouv, непрерывные там и имеющие непрерывные частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v, причем $(\bar{\Delta})$ разлагается на конечное число частей, в каждой из которых отличен от нуля хотя бы один из трех определителей A, B, C матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$

$\left(A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & z'_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right).$

2. Пусть функция $\Phi(x,y,z)$ определена и непрерывна на поверхности (S). Тогда $I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS$ существует и выражается через обыкновенный двойной интеграл по формуле

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \Phi\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \quad (2)$$

В (2)

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$
$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v.$$

▶ Заметим, что двойной интеграл

$$I_* = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} \Phi\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

стоящий в правой части равенства (2), существует, ибо подынтегральная функция в нем есть функция непрерывная в $(\overline{\Delta})$.

Составим сумму Римана σ для $I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS$. Для этого надо разбить поверхность (S) на квадрируемые части (S_k). Такое разбиение мы осуществим, разбив произвольной сетью простых кривых область $(\overline{\Delta})$ на части $(\overline{\Delta}_k)$. Дело в том, что разбивая $(\overline{\Delta})$ на части $(\overline{\Delta}_k)$ с площадями F_k ($k = \overline{1,n}$), мы тем самым разбиваем (S) на части (S_k) с площадями S_k ($k = \overline{1,n}$), причем

$$S_k = \iint\limits_{(\overline{\Delta}_k)} \sqrt{EG-F^2}\,dudv. \quad (3)$$

Применяя к двойному интегралу, стоящему в правой части (3), частный случай теоремы о среднем, получим

$$S_k = \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(\cdot)(\bar{u}_k, \bar{v}_k)} \cdot F_k, \quad \text{где точка } (\bar{u}_k, \bar{v}_k) \in (\bar{\Delta}_k).$$

Выбор точки (x_k, y_k, z_k) на (S_k) мы осуществим, взяв произвольную точку (u_k, v_k) в $(\bar{\Delta}_k)$ и положив $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$, $z_k = z(u_k, v_k)$. Тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x_k, y_k, z_k) S_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Phi\left[x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)\right] \cdot \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(\cdot)(\bar{u}_k, \bar{v}_k)} \cdot F_k.$$

Сумма, стоящая здесь в правой части, похожа на сумму Римана для двойного интеграла J_*, но таковой не является, ибо точки (u_k, v_k) и $(\bar{u}_k, \bar{v}_k)$, вообще говоря, различны. Желая доказать существование J, мы не сможем ограничить выбор точки (u_k, v_k), положив $u_k = \bar{u}_k$, $v_k = \bar{v}_k$. Составим сумму

$$\sigma_* = \sum_{k=1}^{n} \Phi\left[x(\bar{u}_k, \bar{v}_k), y(\bar{u}_k, \bar{v}_k), z(\bar{u}_k, \bar{v}_k)\right] \cdot \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(\cdot)(\bar{u}_k, \bar{v}_k)} \cdot F_k.$$

Это уже настоящая сумма Римана для двойного интеграла J_*, и потому $\sigma_* \to J_*$ при $\lambda_* \to 0$ (здесь λ_* — ранг дробления области $(\bar{\Delta})$). Ясно, что при $\lambda_* \to 0$ будет $\lambda \to 0$. Можно доказать и обратное: если $\lambda \to 0$, то и $\lambda_* \to 0$, так что соотношения $\lambda_* \to 0$ и $\lambda \to 0$ — равносильные. Значит, $\sigma_* \to J_*$ при $\lambda \to 0$.

Имеем $\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*)$. Отсюда видим, что теорема будет доказана, если показать, что $(\sigma - \sigma_*) \xrightarrow[\lambda_* \to 0]{} 0$.

Имеем

$$\sigma - \sigma_* = \sum_{k=1}^{n} \Big[\Phi\big(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)\big) -$$

$$- \Phi\big(x(\bar{u}_k, \bar{v}_k), y(\bar{u}_k, \bar{v}_k), z(\bar{u}_k, \bar{v}_k)\big)\Big] \cdot \sqrt{EG - F^2}\Big|_{(\cdot)(\bar{u}_k, \bar{v}_k)} \cdot F_k.$$

Положим

$$\Phi\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]=\psi(u,v)$$

и вспомним, что $\sqrt{EG-F^2}\Big|_{(\cdot)(\bar{u}_k,\bar{v}_k)}\cdot F_k=S_k$. Тогда

$$\sigma-\sigma_*=\sum_{k=1}^{n}\left[\psi(u_k,v_k)-\psi(\bar{u}_k,\bar{v}_k)\right]\cdot S_k\ .$$

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, сколь угодно малое. Отметим, что функция $\psi(u,v)\in C(\overline{\Delta})$, как суперпозиция непрерывных функций. Следовательно, $\psi(u,v)$ равномерно непрерывная в $(\overline{\Delta})$ (см. теорему Кантора). Поэтому взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (u',v') и (u'',v'') из $(\overline{\Delta})$, для которых $\rho\big((u',v'),(u'',v'')\big)<\delta$, будет $\left|\psi(u'',v'')-\psi(u',v')\right|<\dfrac{\varepsilon}{S}$ (здесь S — площадь поверхности (S)).

Считая дробление области $(\overline{\Delta})$ таким, что $\lambda_*<\delta$, будем иметь

$$\left|\psi(u_k,v_k)-\psi(\bar{u}_k,\bar{v}_k)\right|<\frac{\varepsilon}{S},\qquad k=\overline{1,n}\,.$$

И потому $\left|\sigma-\sigma_*\right|<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\varepsilon}{S}\cdot S_k=\varepsilon$. Так как неравенство $\left|\sigma-\sigma_*\right|<\varepsilon$ получено нами лишь при условии, чтобы было $\lambda_*<\delta$, то заключаем, что $(\sigma-\sigma_*)\xrightarrow[\lambda_*\to 0]{}0$, а это и требовалось доказать. ◀

Частный случай. Пусть поверхность (S) задана уравнением $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ — функция, определенная и непрерывная в области $(\overline{D})$ плоскости Oxy и имеющая там непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Тогда для любой функции $\Phi(x,y,z)$, непрерывной на (S), поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{(S)}\Phi(x,y,z)\,dS$ существует и выражается через обыкновенный двойной интеграл по формуле

$$I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(\bar{D})} \Phi[x,y,f(x,y)] \cdot \sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \qquad (\tilde{2})$$

(Отметим, что $(\bar{D})$ есть проекция (S) на плоскость Oxy.)

▶ В этом случае параметрическими уравнениями поверхности (S) будут $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y), \end{cases}$ x и y — параметры. Матрица

$$\begin{pmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix};$$

$$E = 1 + [f'_x(x,y)]^2, \quad G = 1 + [f'_y(x,y)]^2, \quad F = f'_x(x,y) \cdot f'_y(x,y).$$

Значит,

$$EG - F^2 = (1 + f'^2_x)(1 + f'^2_y) - f'^2_x \cdot f'^2_y = 1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y),$$

и, следовательно,

$$I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(\bar{D})} \Phi[x,y,f(x,y)] \cdot \sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \blacktriangleleft$$

Замечание. Непрерывность функции $\Phi(x,y,z)$ на (S) является достаточным, но не необходимым условием существования $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS$. Можно доказать, что поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dS$ существует, если существует двойной интеграл, стоящий в правой части равенства (2). Существование же двойного интеграла, как мы знаем, не исчерпывается классом непрерывных функций.

3°. Свойства поверхностного интеграла первого рода.

Приводимые ниже свойства поверхностного интеграла первого рода аналогичны уже известным нам свойствам двойного интеграла. Поэтому мы ограничимся лишь перечислением некоторых из них, не останавливаясь на доказательствах.

1. $\iint\limits_{(S)} dS = S$, где S — площадь поверхности (S).

2. $\iint\limits_{(S)} \alpha \cdot \Phi(x,y,z)\, dS = \alpha \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\, dS$, где α — постоянное число.

3. $\iint\limits_{(S)} [\Phi(x,y,z) \pm \Psi(x,y,z)] dS = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\, dS \pm \iint\limits_{(S)} \Psi(x,y,z)\, dS$.

4. $\iint\limits_{(\tilde{S})} \Phi(x,y,z)\, dS + \iint\limits_{(\tilde{\tilde{S}})} \Phi(x,y,z)\, dS = \iint\limits_{(\tilde{S}) \cup (\tilde{\tilde{S}})} \Phi(x,y,z)\, dS$.

5. $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\, dS \le \iint\limits_{(S)} \Psi(x,y,z)\, dS$, если $\Phi(x,y,z) \le \Psi(x,y,z)$ на (S).

6. $\left| \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\, dS \right| \le \iint\limits_{(S)} |\Phi(x,y,z)|\, dS$.

7. **Теорема о среднем значении.** Если функция $\Phi(x,y,z) \in C((S))$, то на (S) найдется хотя бы одна точка (ξ, η, ζ) такая, что будет

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\, dS = S \cdot \Phi(\xi, \eta, \zeta).$$

4. Физическое истолкование поверхностного интеграла первого рода.

Задача. Пусть имеется поверхность (S), на которой с известной поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$ распределена масса, причем функция $\rho(x,y,z)$ предполагается непрерывной на (S). Требуется найти массу m этой материальной оболочки.

Решение. Для вычисления массы m поступаем уже знакомым нам образом. Разбиваем (S) произвольным образом на части (S_k), $k = \overline{1,n}$. Пусть d_k — диаметр (S_k), $\lambda = \max\limits_{k=1,n}\{d_k\}$. Считаем элементы (S_k) столь малыми, что в пределах (S_k) поверхностную плотность распределения массы можно считать постоянной, равной $\rho(x_k, y_k, z_k)$, где точка (x_k, y_k, z_k) — любая, принадлежащая (S_k). Тогда масса Δm_k k-го элемента материальной оболочки будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k, z_k)\cdot S_k, \quad \text{где} \quad S_k \text{ — площадь } (S_k).$$

Масса m всей материальной оболочки будет приближенно выражаться суммой, состоящей из n слагаемых

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) S_k\,. \tag{*}$$

Интуитивно ясно, что чем мельче участки (S_k), тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая участок (S_k) однородным. Поэтому за массу m материальной оболочки естественно принять предел суммы (*) при $\lambda \to 0$, т. е.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) S_k = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y, z)\, dS\,.$$

Таким образом, мы можем истолковать поверхностный интеграл как массу материальной оболочки, рассматривая подынтегральную функцию как поверхностную плотность распределения массы. Такое истолкование возможно для любой непрерывной и неотрицательной функции.

5°. Механические приложения поверхностных интегралов первого рода. Если поверхность (S) отнесена к прямоугольной системе координат, то, зная поверхностную плотность $\rho(x, y, z)$ распределения массы, мы можем выразить *статические моменты* материальной оболочки (S) относительно координатных плоскостей по формулам:

$$M_{xy} = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y, z)\, z\, dS, \qquad M_{xz} = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y, z)\, y\, dS,$$

$$M_{yz} = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y, z)\, x\, dS. \tag{4}$$

Соображения, с помощью которых мы приходим к этим формулам, совершенно такие же, как и в случае плоской фигуры.

Координаты центра масс материальной оболочки выражаются формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \tag{5}$$

где m — масса оболочки. Если оболочка однородная ($\rho = \text{const}$), то формулы принимают вид:

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x\,dS, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} y\,dS, \quad z_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} z\,dS, \tag{6}$$

где S — площадь оболочки.

Моменты инерции материальной оболочки относительно координатных осей выражаются формулами:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dS, \quad I_y = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dS,$$

$$I_z = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dS, \tag{7}$$

а момент инерции относительно начала координат (полярный момент инерции) — по формуле

$$I_O = \iint\limits_{(S)} \rho(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)\,dS. \tag{8}$$

Формулы (4) — (8) получаются на основании соответствующих определений статики для системы материальных точек в пространстве. На подробном повторении этих определений и рассуждений, приводящих к указанным формулам, останавливаться нет надобности: читатель без особого труда проделает все это самостоятельно.

Пример 1. Вычислить массу m куска поверхности, отсеченного плоскостью $z=1$ от параболоида вращения $2z = x^2+y^2$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от плоскости Oxy, т. е. $\rho = k\cdot z$.

Решение. Для искомой массы имеем формулу

$$m = \iint\limits_{(S)} \rho\,dS = \iint\limits_{(S)} kz\,dS.$$

У нас поверхность (S) задана формулой $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow z'_x = x$, $z'_y = y$. Легко видеть, что область $(\overline{D})$, т. е. проекция (S) на плоскость Oxy, есть круг $x^2+y^2 \le 2$, а потому

$$m = \iint\limits_{(S)} kz\,dS = \frac{k}{2}\iint\limits_{(\overline{D})}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}\cdot r^3 dr =$$

$$= \frac{2k\pi}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1+r^2}\,r\,dr = \begin{bmatrix} 1+r^2 = t^2 \\ r\,dr = t\,dt \end{bmatrix} = k\pi\int\limits_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)\,t^2 dt =$$

$$= k\pi\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = k\pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2k\pi}{15}\left(6\sqrt{3} + 1\right).$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной оболочки полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной над плоскостью Oxy.

Решение. Легко понять, что центр масс этой оболочки лежит на оси Oz. А это означает, что $x_c = 0$ и $y_c = 0$. Следовательно, нам остается вычислить лишь z_c.

Так как оболочка однородная ($\rho = \text{const}$), то для z_c имеем формулу

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} z\,dS.$$

Из уравнения $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ находим $z'_x = -\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$. Следовательно, $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{a}{z}$. А тогда

$$\iint\limits_{(S)} z\,dS = \iint\limits_{(\overline{D})} a\,dxdy = a \cdot \pi a^2,$$

ибо $(\overline{D})$ есть круг $x^2 + y^2 \le a^2$. У нас $S = 2\pi a^2$ (площадь полусферы). Поэтому

$$z_c = \frac{a \cdot \pi a^2}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$$

§2. Поверхностные интегралы второго рода

1°. Сторона поверхности. Пусть (S) — поверхность, имеющая в каждой точке касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется вместе с точкой касания. Тогда в каждой точке поверхности (S) существует нормаль, которой можно приписать определенное направление (одно из двух возможных).

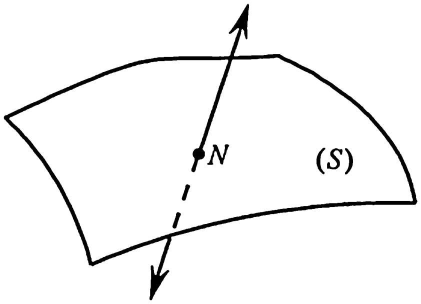


Рис. 11.2. К определению стороны поверхности

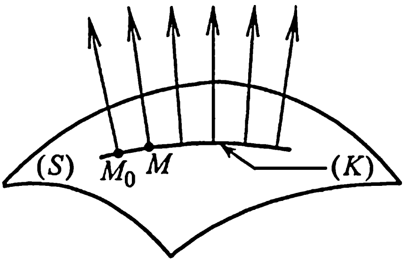


Рис. 11.3. К определению стороны поверхности

Выберем на (S) точку M_0 и проведем на (S) какую-нибудь линию (K), проходящую через точку M_0 и не пересекающую контура поверхности (S) (см. рис. 11.3). Проведем в точке M_0 нормаль к (S) и припишем ей определенное направление. Пусть точка M движется вдоль по (K), выходя из точки M_0. Проведем в точке M нормаль к (S), приписав ей в начальный момент (когда точка M совпадала с точкой M_0) то направление, которое имела нормаль в точке M_0, а в остальные моменты — то направление, в которое непрерывным образом переходит исходное. Таким образом, в каждой точке (K) мы получим определенное направление нормали.

Пусть, в частности, линия (K) замкнута. Тогда мы можем по этой линии возвратиться в точку M_0 и прийти туда с определенным направлением нормали, которое может совпадать с исходным, а может быть и противоположным ему.

1. Если существует хотя бы один замкнутый контур (K), исходящий из точки M_0 и возвращающий нас туда с направлением нормали, противоположным исходному, то поверхность называется *односторонней*. Классическим примером такой поверхности является так называемый лист Мёбиуса (см. рис. 11.4). Модель ее можно получить, если прямоугольный кусок бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D. Если полученное перекрученное кольцо начать красить в какой-либо цвет, то можно, не переходя через его границы, покрасить все кольцо этим цветом. (Мы в дальнейшем такие поверхности рассматривать не будем.)

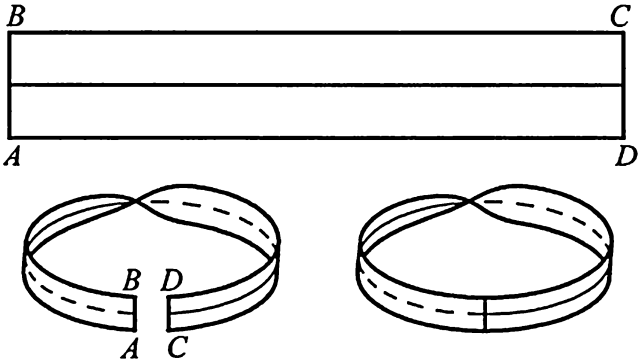


Рис. 11.4. К определению односторонней поверхности

2. Если, каков бы ни был замкнутый контур (K), проходящий через точку M_0, обход по этому контуру возвращает нас в точку M_0 с направлением нормали, совпадающим с исходным, то поверхность называется *двусторонней.*

Пусть (S) — двусторонняя поверхность. Возьмем на (S) точку M_0 и проведем в этой точке направленную нормаль. Возьмем затем на (S) другую точку M и соединим M_0 с M какой-нибудь линией (l), лежащей на (S) и не пересекающей контур поверхности (S). Если перейти из точки M_0 в точку M вдоль (l) и при этом непрерывным образом менять направление нормали, то мы придем в точку M с вполне определенным направлением нормали. Отметим, что это направление не зависит от выбора линии (l). Действительно, если бы два различных пути (l) и $(\tilde{l})$ приводили нас из точки M_0 в точку M с двумя различными направлениями нормали, то замкнутый путь $M_0(l)M(\tilde{l})M_0$ приводил бы нас в точку M_0 с направлением нормали, противоположным исходному. А это невозможно, ибо поверхность (S) двусторонняя. Таким образом, выбор направления нормали в одной точке двусторонней поверхности однозначно определяет выбор направления нормали во всех остальных точках этой поверхности. (Эти направления переходят друг в друга при непрерывном перемещении точек.) Будем говорить, что указанные направления нормалей *согласованы* друг с другом.

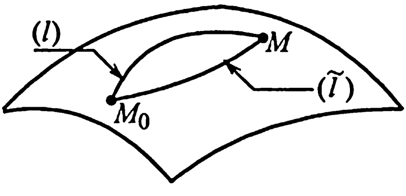


Рис. 11.5

Совокупность согласованных друг с другом направлений нормалей к поверхности (S) определяет *сторону* двусторонней поверхности.

Пример. Простейшим и наиболее важным примером двусторонней поверхности является поверхность (S), заданная явным уравнением $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ непрерывна в области (D) и имеет там непрерывные частные производные $p = f'_x(x,y)$ и $q = f'_y(x,y)$. В этом случае направляющие косинусы нормали к поверхности (S) имеют выражения:

$$\cos\alpha = \frac{f'_x(x,y)}{\pm\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{f'_y(x,y)}{\pm\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}}.$$

Выбрав перед радикалом определенный знак, мы тем самым устанавливаем во всех точках поверхности (S) определенное направление нормали. Так как направляющие косинусы, в силу сделанных предположений, будут непрерывными функциями координат точки, то и установленное направление нормали будет также непрерывно зависеть от положения точки (направления нормали в точках поверхности (S) будут согласованы друг с другом). Следовательно, выбор знака перед радикалом в формулах для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ определяет сторону поверхности (S).

Если взять перед радикалом знак минус, то во всех точках поверхности $\cos\gamma = \dfrac{-1}{-\sqrt{1 + \left(f'_x(x,y)\right)^2 + \left(f'_y(x,y)\right)^2}}$ будет положительным, т. е. угол, составленный с осью Oz нормалью соответствующей выбранной стороне поверхности (S), будет острым. Эта сторона поверхности называется *верхней*, а противоположная — *нижней*. Нижняя сторона поверхности (S) характеризуется направлениями нормалей, составляющими с осью Oz тупые углы. (Нижней стороне поверхности (S) отвечает выбор перед радикалом, в формулах для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ знака плюс.)

2°. Определение поверхностного интеграла второго рода.

Пусть (S) — двусторонняя поверхность, проектирующаяся на плоскость Oxy в область $(\overline{D})$, ограниченную простой кривой. Пусть на (S) задана ограниченная функция $\Phi(x,y,z)$. Выберем определенную сторону поверхности (S) и проделаем следующие операции.

1. Разобьем (S) на части (S_1), (S_2), ..., (S_n) при помощи линий, которые проектируются на плоскость Oxy в простые кривые, разбивающие $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, ..., $(\overline{D}_n)$ с площадями F_1, F_2, ..., F_n. Пусть λ — наибольший из диаметров (S_k), $k=\overline{1,n}$.

2. В каждой части (S_k) берем произвольную точку $N_k(x_k,y_k,z_k)$ и вычисляем в ней значение функции Φ, т. е. находим $\Phi(x_k,y_k,z_k)$.

3. Умножим найденное значение функции на площадь F_k, снабженную знаком плюс, если нормаль, проведенная к поверхности (S) в точке N_k и направленная так, как это соответствует выбранной стороне поверхности (S), образует с осью Oz острый или прямой угол и снабженную знаком минус, если этот угол тупой. Получим: в случае а) $\Phi(x_k,y_k,z_k)\cdot F_k$ (рис. 11.6, а); в случае б) $\Phi(x_k,y_k,z_k)\cdot(-F_k)$ (рис. 11.6, б).

4. Складываем все такие произведения. Получим своего рода интегральную сумму σ. Отметим, что значение суммы σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения (S) на части (S_k), так и от выбора точки $N_k(x_k,y_k,z_k)$ на (S_k).

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda\to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$.

Если существует конечный предел $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения (S) на части (S_k), ни от способа выбора точек $N_k(x_k,y_k,z_k)$ на (S_k), то его называют *поверхностным интегралом второго рода* от функции $\Phi(x,y,z)$ по выбранной стороне поверхности (S) и обозначают так:

$$\iint\limits_{(S)}\Phi(x,y,z)\,dxdy$$

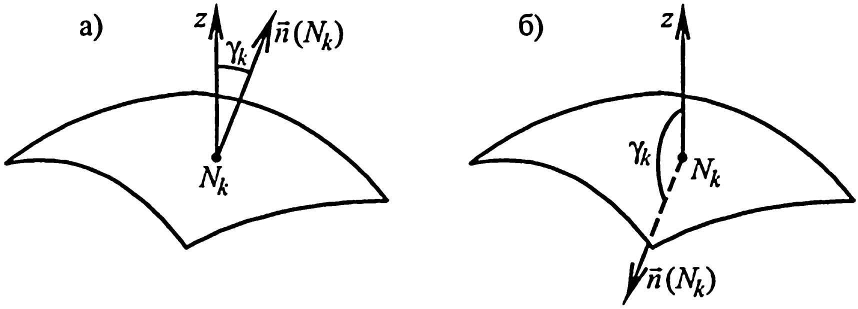


Рис. 11.6

(сторона поверхности должна быть указана особо).

Замечание 1. Если вместо плоскости Oxy проектировать элементы поверхности (S) на плоскости Oyz или Ozx, то получим два других поверхностных интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dydz, \qquad \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dzdx\,.$$

В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех этих видов:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy\,,$$

где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ есть функции, определенные в точках поверхности (S). Подчеркнем еще раз, что во всех случаях поверхность (S) предполагается двусторонней и что интеграл распространяется на определенную ее сторону.

Замечание 2. При перемене стороны поверхности, по которой ведется интегрирование, интеграл меняет знак. (Это следует из самого определения поверхностного интеграла второго рода.)

3°. Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Теорема 1. 1. Пусть поверхность (S) задана уравнением $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной простым контуром (тогда различные стороны поверхности (S) суть верхняя и нижняя.)

2. Пусть функция $\Phi(x,y,z)$ непрерывна на (S). Тогда $I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy$ существует и выражается через обыкновенный двойной интеграл так:

α) $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy$, если интегрирование ведется по верхней стороне поверхности (S);

β) $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy = -\iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy$, если интегрирование ведется по нижней стороне поверхности (S).

▶ Достаточно рассмотреть случай, когда интегрирование ведется по верхней стороне поверхности (S). Отметим, что двойной интеграл

$$I_* = \iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy,$$

стоящий в правой части формулы α), существует, ибо подынтегральная функция в нем есть функция непрерывная в $(\overline{D})$. Составим интегральную сумму σ для I:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x_k, y_k, z_k) \cdot F_k .$$

Здесь $z_k = f(x_k, y_k)$. Значит,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \Phi\big(x_k, y_k, f(x_k, y_k)\big) \cdot F_k .$$

Сумма, стоящая здесь справа, есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла I_*. Так как I_* существует, то $\sigma \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ (здесь λ_* — ранг дробления $(\overline{D})$). Можно доказать, что $(\lambda_* \to 0) \Leftrightarrow (\lambda \to 0)$. Следовательно, $\sigma \to I_*$ при $\lambda \to 0$, т. е. $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ существует и равен I_*, а это и требовалось установить. ◀

Замечание. В дальнейшем поверхность (S), удовлетворяющую условиям теоремы 1, будем называть поверхностью вида (I).

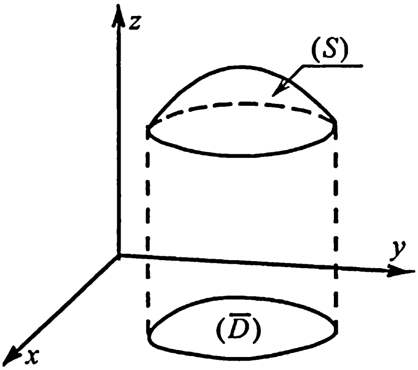


Рис. 11.7. К теореме 1

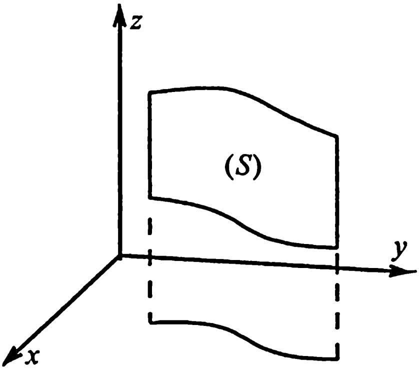


Рис. 11.8. К теореме 2

Теорема 2. Пусть (S) — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является простая кривая, лежащая в плоскости Oxy. (Такую поверхность впредь будем называть поверхностью вида (II).) Тогда для любой функции $\Phi(x,y,z)$, определенной на (S), $I = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy$ существует, причем $\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy = 0$.

Утверждение теоремы 2 очевидно.

Впредь мы будем рассматривать только такие поверхности, которые разлагаются на конечное число частей указанных двух типов (I) и (II).

4°. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Теорема. Пусть (S) — двусторонняя поверхность, которая разлагается на конечное число частей видов (I) и (II). Пусть функция $\Phi(x,y,z)$ непрерывна на (S). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\cos\gamma\,dS. \qquad (*)$$

Здесь интеграл слева берется по определенной стороне поверхности (S); γ — угол между осью Oz и тем направлением нормали к (S), которым характеризуется сторона поверхности (S), по которой берется интеграл, стоящий в левой части равенства (*).

▶ 1) Если (S) — цилиндрическая поверхность вида (II), то формула (*) очевидна. Обе части формулы (*) равны нулю. Левая часть равна нулю по теореме 2, а правая часть равна нулю, так как $\cos\gamma = 0$ в любой точке поверхности (S).

2) Пусть (S) — поверхность вида (I), т. е. (S) задана уравнением $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной простым контуром. Для определенности будем считать, что мы интегрируем по верхней стороне поверхности (S).

Выразим оба поверхностных интеграла через двойной интеграл. Имеем

$$I_{\text{лев.}} = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)dxdy;$$

$$I_{\text{прав.}} = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\cos\gamma\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}\cdot\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{D})} \Phi\big(x,y,f(x,y)\big)dxdy.$$

Таким образом, убеждаемся, что $I_{\text{лев.}} = I_{\text{прав.}}$. ◀

Совершенно аналогично в справедливости равенства (*) можно убедиться, когда интегрирование ведется по нижней стороне поверхности (S). В общем случае надо разложить (S) на части указанных двух видов (I) и (II).

Замечание. Аналогично устанавливается, что

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dydz = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\cos\alpha\,dS,$$

$$\iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\,dzdx = \iint\limits_{(S)} \Phi(x,y,z)\cos\beta\,dS.$$

§3. Формула Стокса

1) Пусть (S) — двусторонняя поверхность, которая разлагается на конечное число частей видов (I) и (II). Пусть (S) ограничена контуром (l), который проектируется на плоскости xy и xz в простые кривые.

2) Пусть функция $P(x,y,z)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ на (S). Тогда

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint\limits_{(l)} P(x,y,z)\, dx \tag{1}$$

((1) — *малая формула Стокса*).

В формуле (1) интеграл слева берется по определенной стороне поверхности (S). В интеграле справа интегрировать по (l) надо так, чтобы наблюдатель, движущийся по (l) в направлении интегрирования (и расположенный так, чтобы нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности (S), проходила у него от ног к голове) видел (S) справа от себя. (Это правило приспособлено к левой системе координат. Для правой системы координат интегрировать по (l) нужно в обратном направлении.)

▶ 1) Пусть (S) задана уравнением $z = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$, лежащей в плоско-

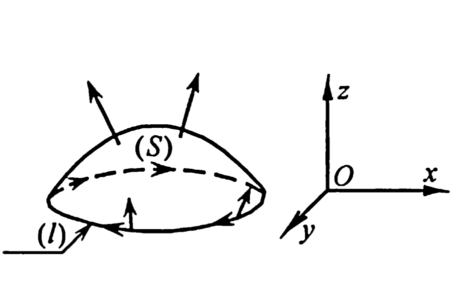


Рис. 11.9. К формуле Стокса

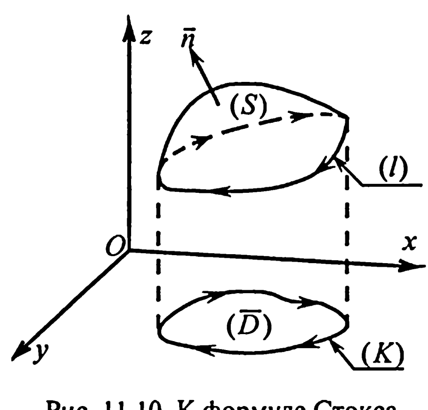


Рис. 11.10. К формуле Стокса

сти Oxy и ограниченной простым контуром (K). Для определенности будем считать, что интегрирование идет по верхней стороне поверхности (S).

Пусть $I = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$. Выразим I поверхностным интегралом первого рода:

$$I = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS .$$

Перейдем теперь к двойному интегралу. Имеем

$$\cos\gamma = \frac{+1}{+\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{f'_y}{-\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

(перед радикалом знак минус, ибо интегрирование ведется по верхней стороне (S)). Тогда по формуле перехода к двойному интегралу, получим

$$I = \iint\limits_{(D)} \left[P'_z(x,y,f(x,y)) \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} - \right.$$

$$\left. - P'_y(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \right] \cdot \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{(D)} \left[P'_z(x,y,f(x,y)) \cdot f'_y(x,y) + P'_y(x,y,f(x,y)) \right] \cdot dxdy .$$

Введем в рассмотрение функцию $P^*(x,y) = P(x,y,f(x,y))$. Имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = P'_y(x,y,f(x,y)) + P'_z(x,y,f(x,y)) \cdot f'_y(x,y) .$$

А тогда $I = -\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P^*}{\partial y} dxdy$. Применим сюда формулу Грина. Будем иметь $I = \oint\limits_{(K)} P^* dx$. (Здесь интегрирование по (K) ведется в направлении, оставляющем область (D) справа.)

Остается показать, что $\oint\limits_{(K)} P^* dx = \oint\limits_{(l)} P dx$. Для этого составим интегральную сумму Римана для $\oint\limits_{(l)} P dx$. Разобьем (l) точками $M_k(x_k, y_k, z_k)$ на части и пусть

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k, z_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Но $z_k = f(x_k, y_k)$, ибо точка M_k лежит на поверхности (S). Поэтому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P\big(x_k, y_k, f(x_k, y_k)\big)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} P^*(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Сумма, стоящая здесь справа, есть интегральная сумма Римана для интеграла $\oint\limits_{(K)} P^*(x,y)\,dx$. Значит, $\sigma \to \oint\limits_{(K)} P^*(x,y)\,dx$ при $\lambda^* \to 0$, где λ^* — ранг дробления (K). Заметим, что если λ — ранг дробления (l), то $(\lambda^* \to 0) \Leftrightarrow (\lambda \to 0)$. (Это можно доказать.) Поэтому $\sigma \to \oint\limits_{(K)} P^*(x,y)\,dx$ при $\lambda \to 0$. А так как $\sigma \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \oint\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx$, то получаем $\oint\limits_{(K)} P^* dx = \oint\limits_{(l)} P dx$.

2) Пусть (S) есть ограниченный контуром (l) кусок цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит простая кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, и лежащая в плоскости Oxy (см. рис. 11.11). Пусть (S) проектируется на плоскость Oxz в область $(\overline{D})$, ограниченную простым контуром (K). Имеем $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0$ (см. теорему 2 предыдущего параграфа). Поэтому формула (1), которую нужно доказать, имеет в этом случае вид

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx = \oint\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx. \qquad (\tilde{1})$$

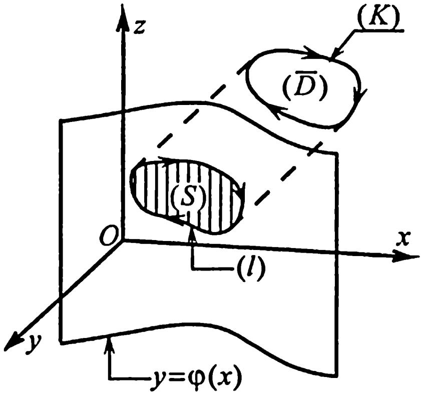


Рис. 11.11. К формуле Стокса

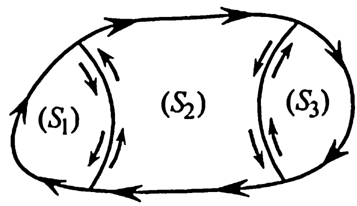


Рис. 11.12. К формуле Стокса

Здесь $\iint\limits_{(S)} P_z'(x,y,z)\,dzdx = \iint\limits_{(\bar{D})} P_z'(x,\varphi(x),z)\,dzdx$. Мы интегрируем, для определенности, по той стороне поверхности (S), нормаль на которой образует с Oy острый угол. Поэтому интеграл справа взят со знаком плюс. Положим $P(x,\varphi(x),z) = P^*(x,z)$. Имеем $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P^*}{\partial z}$. Поэтому $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx = \iint\limits_{(\bar{D})} \frac{\partial P^*}{\partial z} dzdx$. К двойному интегралу, стоящему в правой части последнего равенства, применяем формулу Грина. Получим $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx = \oint\limits_{(K)} P^*(x,z)\,dx$. Здесь интегрирование по (K) производится в том направлении, которое оставляет область (D) справа. Этим и объясняется отсутствие знака минус в формуле Грина.

Остается доказать, что $\oint\limits_{(K)} P^*(x,z)\,dx = \oint\limits_{(l)} P(x,y,z)\,dx$. Это делается так же, как и в случае 1).

3) Если (S) разлагается на конечное число частей рассмотренных двух видов, то нужно написать формулу (1) для каждой такой части, а затем сложить полученные результаты. Криволинейные интегралы по разбивающим кривым придется брать дваж-

ды в противоположных направлениях. Следовательно, они исчезнут, и мы получим формулу (1) в этом общем случае. ◀

Отметим, что более общих поверхностей мы рассматривать не будем.

Замечание. При соответствующих условиях, накладываемых на функции $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, а также при соответствующих условиях, накладываемых на двустороннюю поверхность (S) и ее контур (l), совершенно аналогичным образом устанавливаются формулы:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz = \oint\limits_{(l)} Q(x,y,z)\, dy\,, \tag{2}$$

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx = \oint\limits_{(l)} R(x,y,z)\, dz \tag{3}$$

(формулы (2) и (3) получаются из (1) круговой перестановкой).

Пусть имеются три функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, непрерывные вместе с $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ на поверхности (S). Пусть (S) — двусторонняя поверхность и (l) — ее контур. Выберем на (S) определенную сторону и направление интегрирования на (l) так, как было указано выше.

Пусть верны все три формулы: (1), (2), (3). Тогда, сложив соответствующие части этих формул, получим *большую формулу Стокса:*

$$\oint\limits_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx\,. \tag{4}$$

Заменяя в (4) поверхностный интеграл второго рода поверхностным интегралом первого рода, получим формулу Стокса в виде

$$\oint\limits_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS. \quad (5)$$

Формулу (5) часто пишут в символической форме

$$\oint\limits_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \quad (\tilde{5})$$

В формулах (5) и ($\tilde{5}$) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, отвечающей выбранной стороне поверхности (S).

§4. Вопрос о независимости криволинейного интеграла в пространстве от пути интегрирования

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ заданы функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, непрерывные там вместе с $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$.

1. Будем говорить, что функции P, Q, R образуют в $\mathbf{R}^3$ тройку типа "α", если $\oint\limits_{\smile AB} Pdx + Qdy + Rdz$, взятый по незамкнутому пути $\smile AB$, не зависит от формы пути (а зависит только от концов пути A и B).

2. Будем говорить, что функции P, Q, R образуют в $\mathbf{R}^3$ тройку типа "β", если для любого замкнутого самонепересекающегося контура (L) оказывается $\oint\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Теорема 1. Свойство функций P, Q, R образовывать в пространстве $\mathbf{R}^3$ тройку типа "α" равносильно свойству образовывать тройку типа "β".

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения в плоском случае.

Теорема 2. Для того чтобы тройка функций P, Q, R имела в пространстве $\mathbf{R}^3$ тип "β" (а значит, и тип "α"), необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\ \text{всюду в}\ \mathbf{R}^3. \qquad (*)$$

▶ *Достаточность.* Пусть условие (*) выполнено. Возьмем любой замкнутый самонепересекающийся контур (L) и натянем на него двустороннюю поверхность (S). Тогда по формуле Стокса

$$\oint_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx.$$

Поверхностный интеграл, стоящий в правой части, благодаря соотношениям (*) равен нулю. Следовательно, $\oint\limits_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=0$. Отсюда, в силу произвольности контура (L), заключаем, что P, Q, R есть тройка типа "β" (а значит, и типа "α") в $\mathbf{R}^3$.

Необходимость. Дано: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — тройка типа "β" в $\mathbf{R}^3$. Требуется доказать, что всюду в пространстве $\mathbf{R}^3$ выполняются соотношения (*).

Рассуждаем от противного. Допустим, что условие (*) не выполнено. Но тогда найдется хотя бы одна точка (x_0,y_0,z_0), в которой нарушается хотя бы одно из равенств (*). Пусть, например, $\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$. Пусть, для определенности,

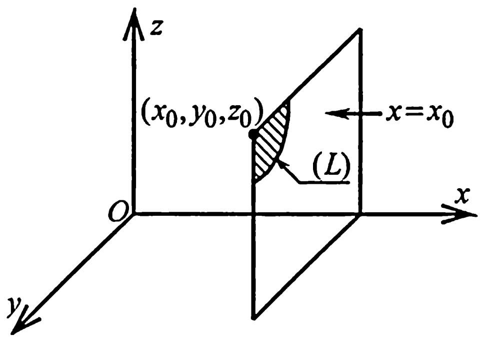


Рис. 11.13. К теореме 2

$\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}>0$. Так как $\dfrac{\partial Q}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial y}$ — непрерывные, то, по теореме о стабильности знака, заключаем, что существует шар $\bar{u}_\rho$ с центром в точке (x_0,y_0,z_0) столь малого радиуса ρ, что во всех точках этого шара будет $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)>0$. Так как $\bar{u}_\rho(x_0,y_0,z_0)$ — замкнутый шар и так как $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)\in C\big(\bar{u}_\rho(x_0,y_0,z_0)\big)$, то разность $\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}$ достигает в $\bar{u}_\rho(x_0,y_0,z_0)$ своего наименьшего значения m. Ясно, что $m>0$. Проведем плоскость $x=x_0$ и обозначим через (S) круг, являющийся сечением шара $\bar{u}_\rho(x_0,y_0,z_0)$ плоскостью $x=x_0$. Пусть (L) — контур этого круга. Выберем на (S) какую-нибудь сторону и направление на (L), соответствующее этому выбору стороны поверхности. По формуле Стокса будем иметь

$$\oint_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=$$
$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx.$$

Но $\displaystyle\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$, $\displaystyle\iint_{(S)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz=0$, ибо (S) — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Поэтому

$$\oint_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz.$$

Считая, что нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности (S), направлена туда же, куда ось Ox, получаем

$$\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz\le -m\cdot\pi\rho^2<0,$$

ибо

$$\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\ge m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\le -m \quad \text{в} \quad \overline{u}_\rho(x_0,y_0,z_0).$$

Но тогда $\oint\limits_{(L)} Pdx+Qdy+Rdz<0$, а это не так (у нас P, Q, R — тройка типа "β"). Получили противоречие. Значит, наше предположение, что условие (*) не выполнено, неверно. ◀

Дополнение. Пусть условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, $\int\limits_{\smile AB} Pdx+Qdy+Rdz$ по любому незамкнутому пути $\smile AB$ не зависит от формы пути, а зависит только от концов пути. Пусть функция $u(x,y,z)$ определена в $\mathbf{R}^3$ и такая, что

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=du(x,y,z),$$

т. е. выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом функции $u(x,y,z)$. Тогда

$$I=\int\limits_{\smile AB} Pdx+Qdy+Rdz=u(x_B,y_B,z_B)-u(x_A,y_A,z_A),$$

где x_A, y_A, z_A — координаты точки A, а x_B, y_B, z_B — координаты точки B.

▶ По условию, $P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=du(x,y,z)$. Это значит, что

$$P(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial y},\quad R(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$I=\int\limits_{\smile AB} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int\limits_{\smile AB}\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}dz.$$

Для вычисления интеграла I введем параметрические уравнения кривой AB. Пусть они такие: $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t),\end{cases}$ $t\in[p,q]$, причем значению $t=p$ отвечает точка A, а значению $t=q$ отвечает точка B. Будем иметь тогда

$$I=\int_p^q\left[\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial y}\psi'(t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial z}\omega'(t)\right]dt.$$

Заметив это, рассмотрим функцию $F(t)=u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$, $t=[p,q]$. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$F'(t)=\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial y}\psi'(t)+$$

$$+\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))}{\partial z}\omega'(t).$$

Следовательно, предыдущее выражение для I принимает вид

$$I=\int_p^q F'(t)\,dt=F(t)\Big|_{t=p}^{t=q}=F(q)-F(p).$$

Но

$$F(q)=u(\varphi(q),\psi(q),\omega(q))=u(x_B,y_B,z_B),$$

$$F(p)=u(\varphi(p),\psi(p),\omega(p))=u(x_A,y_A,z_A).$$

Поэтому $I=u(x_B,y_B,z_B)-u(x_A,y_A,z_A)$. ◀

Таким образом, мы получили метод вычисления криволинейных интегралов от полных дифференциалов.

Пример. Вычислить $I=\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(x+y)\,dz$.

Решение. Здесь $P=y+z$, $Q=x+z$, $R=x+y$;

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=1.$$

Функция $u(x,y,z)=xy+yz+zx$ такая, что

$$du(x,y,z) = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz\,.$$

Поэтому $I = u(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = u(1,1,1) - u(0,0,0) = 3\,.$

§5. Примеры и задачи

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_{(S)} z\,dS$, где (S) — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$), вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Цилиндрическая поверхность $x^2 + z^2 = 2az$ пересекается с конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ по линии (l), определяемой системой $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2az, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$ Исключая z из этой системы, находим проекцию (l) на плоскость Oxy. Это будет замкнутая кривая (K) с уравнением $2x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$. Линия (K) является контуром области (D), на которую проектируется поверхность (S). Отметим, что (D) является фигурой, симметричной относительно обеих координатных осей. В полярной системе координат уравнение контура (K) будет таким: $r = \dfrac{2a}{1 + \cos^2\varphi}$. Заметим, что наименьшее значение аппликаты z точек вырезанной поверхности (S) соответствует точкам $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Это значение $z = a$. Следовательно, все другие значения аппликаты z точек вырезанной поверхности (S) будут больше a. Значит, часть цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = 2az$, вырезанной конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, определяется уравнением

$$z = a + \sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Таким образом, на поверхности (S) имеем

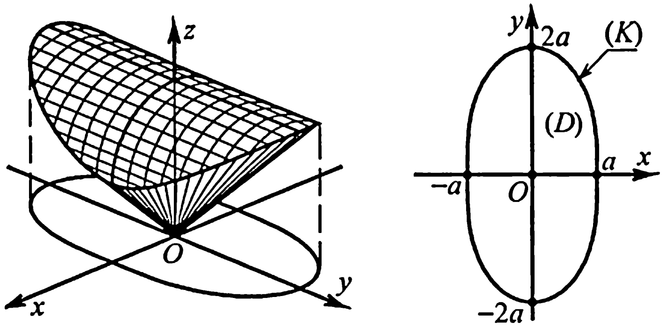


Рис. 11.14. К примеру 1

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad z'_y = 0, \quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Но тогда

$$I = \iint\limits_{(S)} z\,dS = a\iint\limits_{(D)} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dxdy = a\iint\limits_{(D)} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 1\right) dxdy.$$

Вычислять двойной интеграл станем в полярной системе координат. Принимая во внимание симметрию области (D), а также то, что в симметричных относительно координатных осей точках подынтегральная функция принимает равные значения, будем иметь

$$I = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2\cos^2\varphi}} + 1\right) r\,dr =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{a\sqrt{a^2 - r^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi} + \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 8a^3\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\cos^2\varphi} + \frac{1}{(1+\cos^2\varphi)^2}\right) d\varphi =$$

$$= 8a^3\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi} + \frac{1}{(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)^2}\right) d\varphi =$$

$$= 8a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi}{(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)^2} \right) d\varphi =$$

$$= 8a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi} - \frac{\cos^2\varphi}{(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)^2} \right) d\varphi =$$

$$= 8a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2 + \mathrm{tg}^2\varphi} - \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{(2 + \mathrm{tg}^2\varphi)^2} \right) d\varphi =$$

$$= 8a^3 \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2 + \mathrm{tg}^2\varphi} \right) \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= 8a^3 \left(\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{7\sqrt{2} \cdot \pi a^3}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)} (x + y + z)\, dS$, где (S) — поверхность, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Решение. Заметим, что (S) — верхняя полусфера радиуса a с центром в точке $(0, 0, 0)$. Следовательно, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Имеем

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$I = a \iint\limits_{(D)} \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy,$$

где $(\overline{D})$ — есть круг $x^2 + y^2 \leq a^2$. Вычислять двойной интеграл станем в полярной системе координат. Будем иметь

$$I = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=a} \left(\frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 1 \right) r\, dr =$$

$$= \underbrace{a\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a}\frac{r^2dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}}_{=0} + 2\pi a\int\limits_{r=0}^{r=a} r\,dr = 2\pi a\cdot\frac{a^2}{2} = \pi a^3.$$

Пример 3. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)}(x^2 + y^2)\,dS$, где (S) — граница области $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

Решение. Имеем $I = \iint\limits_{(\tilde{S})}(x^2 + y^2)\,dS + \iint\limits_{(\tilde{\tilde{S}})}(x^2 + y^2)\,dS$, где $(\tilde{S})$ — боковая поверхность конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $(\tilde{\tilde{S}})$ — основание этого конуса. $(\tilde{S})$ и $(\tilde{\tilde{S}})$ проектируются на плоскость Oxy в круг $(\overline{D})$: $x^2 + y^2 \le 1$.

Для поверхности $(\tilde{S})$:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому

$$I_1 = \iint\limits_{(\tilde{S})}(x^2 + y^2)\,dS = \sqrt{2}\iint\limits_{(D)}(x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Так как на $(\tilde{\tilde{S}})$: $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$, то

$$I_2 = \iint\limits_{(\tilde{\tilde{S}})}(x^2 + y^2)\,dS = \iint\limits_{(D)}(x^2 + y^2)\,dxdy.$$

А тогда

$$I = I_1 + I_2 = \left(\sqrt{2} + 1\right)\iint\limits_{(D)}(x^2 + y^2)\,dxdy = \left(\sqrt{2} + 1\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=1}r^3dr =$$

$$= \left(\sqrt{2} + 1\right)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \pi\frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

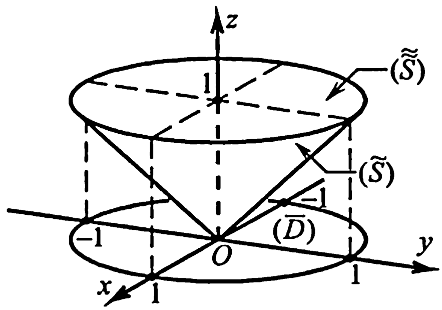


Рис. 11.15. К примеру 3

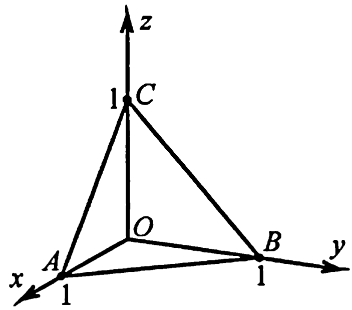


Рис. 11.16. К примеру 4

Пример 4. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)} \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, где (S) — граница тетраэдра $x+y+z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Решение. Здесь $(S) = (S_{\Delta AOB}) \cup (S_{\Delta ABC}) \cup (S_{\Delta OBC}) \cup (S_{\Delta AOC})$.

1) На $(S_{\Delta AOB})$: $z = 0$, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+0+0} = 1$. Поэтому

$$I_1 = \iint\limits_{(S_{\Delta AOB})} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y=0}^{y=1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x + \ln(1+x) \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

2) На $(S_{\Delta ABC})$: $z = 1-x-y$, $z'_x = -1$, $z'_y = -1$,

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \iint\limits_{(S_{\Delta ABC})} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \iint\limits_{(S_{\Delta AOB})} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \cdot I_1 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

3) На $(S_{\Delta OBC})$: $x = 0$, $\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$. Поэтому

$$I_3 = \iint\limits_{(S_{\Delta OBC})} \frac{dS}{(1 + x + y)^2} = \int_0^1 dy \int_{z=0}^{z=1-y} \frac{dz}{(1 + y)^2} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{z}{(1 + y)^2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1-y} dy = \int_0^1 \frac{1 - y}{(1 + y)^2} dy =$$

$$= -\int_0^1 \frac{y + 1 - 2}{(1 + y)^2} dy = -\left(\frac{2}{1 + y} + \ln(1 + y) \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} = -(-1 + \ln 2) = 1 - \ln 2 .$$

4) На $(S_{\Delta AOC})$: $y = 0$, $\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$. Поэтому

$$I_4 = \iint\limits_{(S_{\Delta AOC})} \frac{dS}{(1 + x + y)^2} = \int_0^1 dx \int_{z=0}^{z=1-x} \frac{dz}{(1 + x)^2} = I_3 = 1 - \ln 2 .$$

А тогда

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \left(\sqrt{3} - 1\right) \ln 2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Пример 5. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)} z\,dS$, где (S) — часть поверхности геликоида:

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \quad 0 < u < a, \quad 0 < v < 2\pi. \\ z = v, \end{cases}$$

Решение. (S) задана параметрическими уравнениями, u, v — параметры. Имеем

$$x'_u = \cos v, \qquad y'_u = \sin v, \qquad z'_u = 0;$$
$$x'_v = -u\sin v, \quad y'_v = u\cos v, \quad z'_v = 1;$$

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1;$$
$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1;$$
$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v + 0 = 0;$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + 1}\,.$$

Поэтому

$$I = \iint\limits_{(S)} z\,dS = \iint\limits_{(\Delta)} v\sqrt{EG - F^2}\,dudv =$$

$$= \iint\limits_{(\Delta)} v\sqrt{1 + u^2}\,dudv = \int\limits_0^a \sqrt{1 + u^2}\,du \int\limits_0^{2\pi} v\,dv =$$

$$= 2\pi^2 \int\limits_0^a \sqrt{1 + u^2}\,du = \pi^2\left(u\sqrt{1 + u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\right)\Bigg|_{u=0}^{u=a} =$$

$$= \pi^2\left(a\sqrt{1 + a^2} + \ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)\right).$$

Пример 6. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)} z^2 dS$, где (S) — часть поверхности конуса

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\alpha, \\ y = r\sin\varphi\sin\alpha, \\ z = r\cos\alpha, \end{cases} \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \alpha \text{ — постоянная}$$

$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

Решение. Имеем

$$x'_r = \cos\varphi\sin\alpha, \quad y'_r = \sin\varphi\sin\alpha, \quad z'_r = \cos\alpha,$$

$$x'_\varphi = -r\sin\varphi\sin\alpha, \quad y'_\varphi = r\cos\varphi\sin\alpha, \quad z'_\varphi = 0.$$

$$E = (x'_r)^2 + (y'_r)^2 + (z'_r)^2 = \sin^2\alpha(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\alpha = 1,$$

$$G = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = r^2\sin^2\alpha(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin^2\alpha,$$

$$F = x'_r \cdot x'_\varphi + y'_r \cdot y'_\varphi + z'_r \cdot z'_\varphi =$$

$$= -r\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0.$$

Следовательно,

$$I = \iint\limits_{(\Delta)} r^2\cos^2\alpha\sqrt{r^2\sin^2\alpha}\,d\varphi dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a} r^3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha\,dr =$$

$$= 2\pi\cos^2\alpha\sin\alpha\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Пример 7. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)}(xy + yz + zx)\,dS$, где (S) — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

Решение. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}.$$

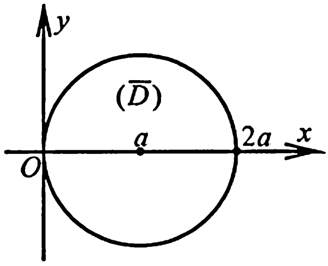


Рис. 11.17. К примеру 7

Следовательно,

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})}\left(xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}\right)\cdot\sqrt{2}\,dxdy,$$

где $(\overline{D})$ — круг $(x - a)^2 + y^2 \le a^2$. Станем вычислять I в полярной системе координат. Тогда $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Уравнение контура области (D) будет таким: $r = 2a\cos\varphi$. Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется неравенствами $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2a\cos\varphi. \end{cases}$ После замены переменных в I будем иметь

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=2a\cos\varphi}\sqrt{2}\,r^3dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot 16a^4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\,a^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi\cos^5\varphi + \sin\varphi\cos^4\varphi + \cos^5\varphi)\,d\varphi = 4\sqrt{2}\,a^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d\varphi,$$

ибо

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\varphi\cos^5\varphi+\sin\varphi\cos^4\varphi)\,d\varphi=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi)\,d\cos\varphi=$$

$$=-\left(\frac{\cos^6\varphi}{6}+\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}=0.$$

Так как $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d\varphi=2\cdot\frac{4!!}{5!!}=\frac{16}{15}$, то

$$I=4\sqrt{2}\cdot\frac{16}{15}a^4=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Пример 8. Найти статический момент однородной треугольной пластинки $x+y+z=a$ ($x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$) относительно плоскости Oxy.

Решение. Имеем $M_{xy}=\iint\limits_{(S)}z\,dS$, где $z=a-x-y$. Так как $z'_x=-1$, $z'_y=-1$, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{3}$, то

$$M_{xy}=\iint\limits_{(D)}(a-x-y)\sqrt{3}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^a dx\int_{y=0}^{y=a-x}(a-x-y)\,dy=$$

$$=-\sqrt{3}\int_0^a dx\int_{y=0}^{y=a-x}(a-x-y)\,d(a-x-y)=$$

$$=-\sqrt{3}\int_{y=0}^{y=a-x}\frac{(a-x-y)^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=a-x}dx=$$

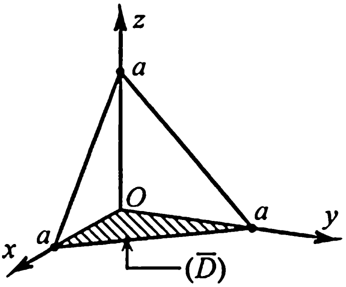


Рис. 11.18. К примеру 8

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^a(a-x)^2dx=-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^a(a-x)^2d(a-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(a-x)^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=a}=\frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 9. Вычислить момент инерции I однородной конической оболочки (S): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0$ $(0\le z\le b)$ плотности ρ_0 относительно прямой (l): $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-b}{0}$.

Решение. Прямая (l) параллельна оси Ox, лежит в плоскости Oxz и отсекает на оси Oz отрезок длины b. Пусть точка $M(x,y,z)\in(S)$ и d — расстояние от точки $M(x,y,z)$ до прямой (l). Ясно, что $d^2=x^2+y^2+(z-b)^2$. Поэтому $I=\rho_0\iint\limits_{(S)}\left(x^2+y^2+(z-b)^2\right)dS$. У нас

$$z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad z'_x=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad z'_y=\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\qquad dS=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy.$$

Следовательно,

$$I=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}\iint\limits_{(\overline{D})}\left(x^2+y^2+b^2\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2\right)dxdy,$$

где $(\overline{D})$ есть круг $x^2+y^2\le a^2$. Станем вычислять I в полярных координатах. Будем иметь

$$I=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=a}\left(r^2+b^2\left(1-\frac{r}{a}\right)^2\right)r\,dr=$$

$$=2\pi\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int\limits_0^a\left(r^2+b^2\left(1-\frac{2r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right)\right)r\,dr=$$

$$=2\pi\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int\limits_0^a\left[\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)r^3-\frac{2b^2}{a}r^2+b^2r\right]dr=$$

$$= 2\pi\rho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)a^4 - \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2}{a}\cdot a^3 + \frac{b^2}{2}a^2\right] =$$

$$= \frac{\pi\rho_0}{6} a\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+b^2).$$

Пример 10. Вычислить $I = \iint\limits_{(S)} (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy)$, где (S) — внешняя сторона поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. Рассмотрим $\tilde{I} = \iint\limits_{(S)} z\,dxdy$. Представим $\tilde{I}$ в виде суммы

$\tilde{I} = \iint\limits_{(S_в)} z\,dxdy + \iint\limits_{(S_н)} z\,dxdy$. Здесь $(S_в)$ — верхняя полусфера $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(S_н)$ — нижняя полусфера $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Имеем

$$\tilde{I} = \iint\limits_{(S)} z\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy - \iint\limits_{(\overline{D})} -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy,$$

где $(\overline{D})$ — круг $x^2+y^2 \le a^2$. Станем вычислять $\tilde{I}$ в полярной системе координат.

$$\tilde{I} = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a} \sqrt{a^2-r^2}\, r\,dr = 4\pi \int\limits_{r=0}^{r=a} \sqrt{a^2-r^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) d(a^2-r^2) =$$

$$= -2\pi\cdot\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=a} = \frac{4\pi}{3}a^3.$$

Совершенно аналогично можно установить, что $\iint\limits_{(S)} x\,dydz = \frac{4\pi}{3}a^3$

и $\iint\limits_{(S)} y\,dzdx = \frac{4\pi}{3}a^3$, так что $I = 4\pi a^3$.

Пример 11. Вычислить

$$\iint\limits_{(S)} f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy,$$

где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции, (S) — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $(\overline{P}) = \begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b, \\ 0 \le z \le c. \end{cases}$

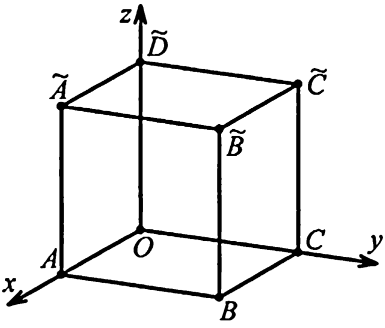


Рис. 11.19. К примеру 11

Решение. Рассмотрим $\widetilde{I} = \iint\limits_{(S)} h(z)\,dxdy$. Представим $\widetilde{I}$ в виде суммы интегралов.

$$\widetilde{I} = \iint\limits_{(\square OABC)} h(z)\,dxdy + \iint\limits_{(\square \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D})} h(z)\,dxdy + \iint\limits_{(\square OA\widetilde{A}\widetilde{D})} h(z)\,dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(\square OC\widetilde{C}\widetilde{D})} h(z)\,dxdy + \iint\limits_{(\square BC\widetilde{C}\widetilde{B})} h(z)\,dxdy + \iint\limits_{(\square AB\widetilde{B}\widetilde{A})} h(z)\,dxdy.$$

Так как интегралы по граням, перпендикулярным к плоскости Oxy, равны нулю, то

$$\widetilde{I} = \iint\limits_{(\square OABC)} h(z)\,dxdy + \iint\limits_{(\square \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D})} h(z)\,dxdy.$$

Имеем

$$\iint\limits_{(\square OABC)} h(z)\,dxdy = -\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b h(0)\,dy = -h(0)\cdot ab,$$

$$\iint\limits_{(\square \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D})} h(z)\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b h(c)\,dy = h(c)\cdot ab.$$

Следовательно, $\widetilde{I} = \big(h(c) - h(0)\big)ab$. Совершенно аналогично находим, что

$$\iint\limits_{(S)} f(x)\,dydz = \big(f(a) - f(0)\big)bc; \quad \iint\limits_{(S)} g(y)\,dzdx = \big(g(b) - g(0)\big)ac.$$

Таким образом, получаем

$$I = \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right] \cdot abc.$$

Пример 12. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (y - z)\,dydz + (z - x)\,dzdx + (x - y)\,dxdy$,

где (S) — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$.

Решение. По формуле связи между поверхностными интегралами первого и второго рода имеем

$$I = \iint\limits_{(S)} [(y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma]\,dS.$$

Здесь

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}.$$

Заметим, что внешняя сторона конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ является нижней стороной поверхности (S). Нормаль к нижней стороне (S) образует с осью Oz тупой угол. Поэтому $\cos\gamma < 0$ и, следовательно, перед радикалом нужно взять знак плюс. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{z}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \sqrt{2}.$$

А тогда $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2} \cdot z}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{2} \cdot z}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(z \ne 0)$. Следовательно,

$$(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(y-z)x+(z-x)y-(x-y)z}{z}=\sqrt{2}(y-x).$$

Выражаем I через двойной интеграл. Так как $dS=\sqrt{2}\,dxdy$, то будем иметь

$$I=\iint\limits_{(\overline{D})}2(y-x)\,dxdy,$$

где $(\overline{D})$ — круг $x^2+y^2\le h^2$. Переходя к полярным координатам, получим

$$I=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=h}r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dr=2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=h}r^2dr=0,$$

ибо $\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=0$ и $\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0$.

Пример 13. Вычислить $I=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$, где (S) — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Рассмотрим интеграл $\tilde{I}=\iint\limits_{(S)}\frac{dxdy}{z}$. Представим $\tilde{I}$ в виде суммы двух интегралов:

$$\tilde{I}=\iint\limits_{(S_{\text{верхн}})}\frac{dxdy}{z}+\iint\limits_{(S_{\text{нижн}})}\frac{dxdy}{z}.$$

Имеем $(S_{\text{верхн}})$: $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $(S_{\text{нижн}})$: $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Выражаем $\tilde{I}$ через двойной интеграл

$$\tilde{I}=\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}-\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{2}{c}\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

где $(\overline{D})$ — область, ограниченная контуром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Положим

$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $J(r,\varphi)=abr$. Будем иметь

$$\tilde{I} = \frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=1}\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{4\pi ab}{c}\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi ab}{c}.$$

Совершенно аналогично находим

$$\iint_{(S)}\frac{dydz}{x} = \frac{4\pi bc}{a}, \quad \iint_{(S)}\frac{dzdx}{y} = \frac{4\pi ca}{b}.$$

Следовательно,

$$I = 4\pi\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right).$$

Пример 14. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $I = \oint\limits_{(C)} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где (C) — окружность

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ пробегаемая против хода часовой стрелки,

если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение. Возьмем в качестве поверхности (S) круг радиуса a, лежащий в плоскости $x+y+z=0$. Будем иметь

$$I = \oint\limits_{(C)} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint\limits_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x\end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)}(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)\,dS = -\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности (S), т. е. к плоскости $x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-x-y$. Имеем

$$z'_x = -1, \quad z'_y = -1, \quad \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta = \frac{z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = \frac{-1}{\pm\sqrt{3}}.$$

Так как нормаль к плоскости $x+y+z=0$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos\gamma > 0$, и, следовательно, перед радикалом следует взять знак минус. Таким образом, будем иметь $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. А тогда

$$I = -\iint\limits_{(S)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dS = -\sqrt{3}\iint\limits_{(S)}dS = -\sqrt{3}\cdot\pi a^2.$$

Пример 15. Вычислить $I = \int\limits_{(AmB)}(x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+$ $+(z^2-xy)\,dz$, взятый по отрезку винтовой линии: $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$

от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,h)$.

Решение. У нас кривая (AmB) не является замкнутой. Поэтому, если мы хотим использовать формулу Стокса при вычислении I, то кривую (AmB) следует дополнить какой-нибудь линией, которая вместе с (AmB) образует замкнутый контур. Дополним кривую (AmB), например, прямолинейным отрезком (AB):

$\begin{cases} x = a, \\ y = 0, \\ 0 \le z \le h. \end{cases}$ Получим замкнутый контур $(C) = (AmB) \cup (BA)$.(см. рис. 11.20) Тогда $I = \int\limits_{(AmB)} = \oint\limits_{(C)} - \int\limits_{(BA)}$. Имеем

$$I = \oint\limits_{(C)} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(C)} [\cos\alpha \cdot (-x + x) + \cos\beta \cdot (-y + y) +$$

$$+ \cos\gamma \cdot (-z + z)]dS = \iint\limits_{(S)} 0 \cdot dS = 0.$$

$\int\limits_{(AB)} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$ вычисляем непосредственно. На прямолинейном отрезке AB имеем $dx = 0$, $dy = 0$, z изменяется от 0 до h. Поэтому

$$\int\limits_{(AB)} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy +$$

$$+ (z^2 - xy)\,dz = \int\limits_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3}.$$

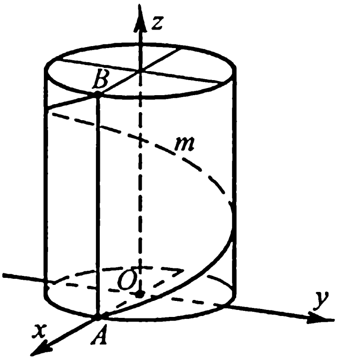


Рис. 11.20. К примеру 15

Так как $\int\limits_{(BA)} = -\int\limits_{(AB)}$, то $\int\limits_{(BA)} = -\dfrac{h^3}{3}$.

Следовательно,

$$I = \oint\limits_{(C)} - \int\limits_{(BA)} = 0 - \left(-\frac{h^3}{3}\right) = \frac{h^3}{3}.$$

Пример 16. Пусть (C) — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку (S). Найти

$$I = \oint\limits_{(C)} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

где контур (C) пробегается в положительном направлении.

Решение. Имеем

$$I = \oint\limits_{(C)} (z\cos\beta - y\cos\gamma)\,dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (z\cos\beta - y\cos\gamma) & (x\cos\gamma - z\cos\alpha) & (y\cos\alpha - x\cos\beta) \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (\cos\alpha\cdot 2\cos\alpha + \cos\beta\cdot 2\cos\beta + \cos\gamma\cdot 2\cos\gamma)\,dS =$$

$$= 2\iint\limits_{(S)} (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\,dS = 2\iint\limits_{(S)} dS = 2S,$$

где S — площадь (S).

Пример 17. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,$$

где (C) — эллипс $\begin{cases} x = a\sin^2 t, \\ y = 2a\sin t\cos t, \quad t\in[0,\pi], \\ z = a\cos^2 t, \end{cases}$ пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

Решение.

$$I = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [(1-1)\cos\alpha + (1-1)\cos\beta + (1-1)\cos\gamma]\,dS = 0\,.$$

Пример 18. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz\,,$$

где (C) — эллипс $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1, \end{cases}$ $(a > 0\,,\ h > 0)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение.

$$I = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS = \iint\limits_{(S)} [-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma]\,dS.$$

У нас (S) — часть плоскости, определяемой уравнением $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ z = h\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$. Имеем

$$z'_x = -\frac{h}{a}, \quad z'_y = 0, \quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a},$$

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}.$$

Так как нормаль к плоскости $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos\gamma > 0$, и, следовательно, перед радикалом следует взять знак минус. А тогда

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Будем иметь, выражая I через двойной интеграл:

$$I = -2\iint\limits_{(\overline{D})} \frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dxdy,$$

где $(\overline{D})$ — круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Переходя к полярным координатам, получим

$$I = -2\frac{a+h}{a}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\,dr = -2\frac{a+h}{a} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = -2\pi a(a+h).$$

Пример 19. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz,$$

где (C) — кривая $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \\ x^2 + y^2 = 2rx, \end{cases}$ $(0 < r < R,\ z > 0)$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ наименьшая область остается слева.

Решение.

$$I = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [2(y-z)\cos\alpha + 2(z-x)\cos\beta + 2(x-y)\cos\gamma]\,dS.$$

Здесь (S) — кусок сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, вырезанный из нее цилиндром $x^2 + y^2 = 2rx$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к (S). Имеем

$$z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}, \quad z'_x = \frac{R-x}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+\frac{(R-x)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{R}{z};$$

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

Так как нормаль к (S) образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos\gamma > 0$ и, следовательно, перед радикалом следует взять знак минус. А тогда

$$\cos\alpha = \frac{(R-x)z}{-z\cdot R} = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\beta = \frac{-y\cdot z}{-z\cdot R} = \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{R}.$$

Поэтому

$$I = 2\iint\limits_{(S)}\left[\frac{(y-z)(x-R)}{R} + \frac{(z-x)y}{R} + \frac{(x-y)z}{R}\right]dS.$$

Выражая I через двойной интеграл, получим

$$I = 2\iint\limits_{(\overline{D})}\left[\frac{(y-z)(x-R)+(z-x)y}{z} + (x-y)\right]dxdy,$$

где $(\overline{D})$ — круг $x^2+y^2 \le 2rx \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I = 2R\iint\limits_{(\overline{D})}\left(1-\frac{y}{z}\right)dxdy =$$

$$= 2R\iint\limits_{(\overline{D})}dxdy - 2R\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{y}{z}dxdy = 2R\cdot\pi r^2 - 2R\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{y}{z}dxdy.$$

Имеем $\tilde{I} = 2R\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{y}{z}dxdy = 2R\iint\limits_{(\overline{D})}\frac{y}{\sqrt{2Rx-(x^2+y^2)}}dxdy$. Переходим

к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$x^2 + y^2 = 2rx \quad \to \quad \rho^2 = 2r\rho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = 2r\cos\varphi,$$

где $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, r]$.

$$\tilde{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^r \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{2\rho R\cos\varphi - \rho^2}}\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2\rho R\cos\varphi - \rho^2}} + \int_{-\pi/2}^{0} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2\rho R\cos\varphi - \rho^2}}.$$

Во втором интеграле справа делаем замену: $\psi = -\varphi$. Будем иметь

$$\int_{-\pi/2}^{0} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2\rho R\cos\varphi - \rho^2}} = -\int_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2\rho R\cos\psi - \rho^2}}.$$

Следовательно, $\tilde{I} = 0$, и поэтому $I = 2\pi R \cdot r^2$.

Глава 12

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Определение тройного интеграла

I. Пусть в некоторой конечной, замкнутой трехмерной ("объемной") области $(\overline{T})$, ограниченной простой поверхностью, задана функция $f(x,y,z)$. Проделаем следующие операции:

1) Дробим $(\overline{T})$ произвольной сетью простых поверхностей на n частей $(\overline{T}_1)$, $(\overline{T}_2)$, $\cdots$, $(\overline{T}_n)$. Пусть объемы этих частичных областей есть соответственно V_1, V_2, ..., V_n, а диаметры — d_1, d_2, ..., d_n. Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{d_k\}$ (λ — ранг дробления).

2) В каждой частичной области $(\overline{T}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k, z_k) и находим в ней значение функции f, т. е. находим $f(x_k, y_k, z_k)$.

3) Умножаем найденное значение функции на объем соответствующей частичной области $f(x_k, y_k, z_k)\cdot V_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4) Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot V_k .$$

Сумму σ будем называть *интегральной суммой Римана*. Отметим, что σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$, так и от выбора точек (x_k, y_k, z_k) в $(\overline{T}_k)$.

5) Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа дробления $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$, $k = \overline{1,n}$, ни от выбора точек (x_k, y_k, z_k) в $(\overline{T}_k)$, то этот предел называют *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области $(\overline{T})$ и обозначают символом $\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dV$ или $\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dxdydz$. Таким образом,

$$\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) V_k .$$

Замечание. Соотношение $J = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ означает: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, такое, что для любого способа дробления $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы ни были при этом выбраны точки (x_k, y_k, z_k) в $(\overline{T}_k)$.

Если у функции $f(x,y,z)$, определенной в $(\overline{T})$, существует $\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dV$, то будем говорить, что $f(x,y,z)$ *интегрируема* в $(\overline{T})$, и писать $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$.

II. Теорема (об ограниченности функции $f(x,y,z)$, интегрируемой в $(\overline{T})$). Если функция $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$, то $f(x,y,z)$ — ограниченная в области $(\overline{T})$.

(Предлагается в качестве упражнения доказать самостоятельно. Доказательство такое же, как и доказательство аналогичной теоремы в теории двойных интегралов.)

Замечание. Теорема необратима, т.е. не всякая функция $f(x,y,z)$, заданная в $(\overline{T})$ и ограниченная там, оказывается интегрируемой в $(\overline{T})$. Следовательно, ограниченность функции

$f(x,y,z)$ в области $(\overline{T})$ является лишь необходимым условием интегрируемости этой функции в $(\overline{T})$. В дальнейшем при изучении тройных интегралов рассматриваются только функции, ограниченные в области $(\overline{T})$.

§2. Признаки интегрируемости функций

Пусть ограниченная функция $f(x,y,z)$ задана в области $(\overline{T})$, ограниченной простой поверхностью.

На вопрос, существует или не существует тройной интеграл $\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dV$, ответить, пользуясь непосредственным определением тройного интеграла, удается лишь в отдельных частных случаях. В связи с этим оказывается важным знание признаков интегрируемости функции $f(x,y,z)$ в области $(\overline{T})$. Но признаки интегрируемости $f(x,y,z)$ в $(\overline{T})$ содержат понятия верхней и нижней сумм Дарбу. Поэтому необходимо ввести эти понятия.

Итак, пусть $f(x,y,z)$ — ограниченная функция, определенная в области $(\overline{T})$. Разобьем $(\overline{T})$ произвольной сетью простых поверхностей на части $(\overline{T}_k)$, $k=\overline{1,n}$, и положим $M_k = \sup\limits_{(\overline{T}_k)}\{f(x,y,z)\}$, $m_k = \inf\limits_{(\overline{T}_k)}\{f(x,y,z)\}$. Отметим, что числа M_k и m_k, $k=\overline{1,n}$, существуют, ибо множество $\{f(x,y,z)\}$, $(x,y,z)\in(\overline{T})$, — ограниченное и сверху, и снизу. Составим суммы

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot V_k \quad \text{и} \quad s=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot V_k .$$

Эти суммы называются соответственно *верхней* и *нижней суммами Дарбу*, отвечающими данному разбиению области $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$. Отметим, что для закрепленного способа разбиения $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$ суммы S и s — определенные числа. Если же способ разбиения изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа S и s. Отметим далее, что интегральные суммы Римана σ даже для закрепленного способа разбиения $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$ принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений (за счет различного выбора точек (x_k, y_k, z_k) в $(\overline{T}_k)$.

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами.

1) Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{T})$. Пусть $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{T})$. Тогда для любой интегральной суммы Римана σ из $\{\sigma\}$ будет: $s \le \sigma \le S$.

2) Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{T})$. Пусть $\{\sigma\}$ — множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{T})$. Тогда $s = \inf\{\sigma\}$, $S = \sup\{\sigma\}$.

3) Пусть s и S — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие какому-нибудь способу дробления области $(\overline{T})$. Добавим теперь еще одну простую поверхность дробления (все прежние поверхности дробления сохраняются). В результате у нас получится некоторый новый способ дробления области $(\overline{T})$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу дробления области $(\overline{T})$. Справедливо утверждение, что $\tilde{S} \le S$, $\tilde{s} \ge s$, т. е. что от добавления новых поверхностей дробления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

4) Выше было отмечено, что для закрепленного способа дробления области $(\overline{T})$ нижняя и верхняя суммы Дарбу s и S суть определенные числа. Если же способ дробления области $(\overline{T})$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S. Следовательно, как s, так и S принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений. Пусть $\{s\}$ — множество значений, принимаемых нижней суммой Дарбу, $\{S\}$ — множество значений, принимаемых верхней суммой Дарбу. Справедливо утверждение

Всякая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу, т. е. для всякой s из $\{s\}$ и для всякой S из $\{S\}$ оказывается $s \le S$.

Видим, что перечисленные здесь свойства сумм Дарбу являются дословным повторением аналогичных свойств сумм Дарбу, установленных для функций $f(x)$, заданных на промежутке $[a, b]$.

Следует отметить, что и доказательства этих свойств совершенно аналогичны прежним.

Теорема (основной признак интегрируемости). Пусть в области $(\overline{T})$ задана ограниченная функция $f(x,y,z)$. Для того чтобы $f(x,y,z)$ была интегрируемой в области $(\overline{T})$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0.$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы в теории двойных интегралов (читатель с пользой для себя сам докажет ее). Следует заметить, что разности $(S - s)$ составляются каждый раз для чисел s и S, отвечающих одному и тому же способу дробления области $(\overline{T})$.

С помощью основного признака интегрируемости можно выделить некоторые классы функций, интегрируемых в данной области $(\overline{T})$, т. е. таких, для которых существует тройной интеграл по области $(\overline{T})$. Так, например, всякая функция $f(x,y,z)$, непрерывная в области $(\overline{T})$, интегрируема в этой области. Среди других функций, принадлежащих к классу интегрируемых в области $(\overline{T})$, отметим такие, которые, являясь ограниченными в области $(\overline{T})$, имеют там отдельные точки разрыва или даже конечное число простых кривых и простых поверхностей, сплошь состоящих из точек разрыва.

§3. Свойства тройного интеграла

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной. Мы перечислим свойства тройного интеграла, не останавливаясь на доказательствах (читатель с пользой для себя сам докажет эти свойства):

1. $\iiint\limits_{(\overline{T})} dV = V$ (V— объем области интегрирования $(\overline{T})$).

2. Если $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и α — произвольное число, то $\alpha \cdot f(x,y,z) \in R(\overline{T})$, причем $\iiint\limits_{(\overline{T})} \alpha f(x,y,z)\,dV = \alpha \iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dV$.

3. Если $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и $g(x,y,z) \in R(\overline{T})$, то $\big(f(x,y,z) \pm$ $\pm\, g(x,y,z)\big) \in R(\overline{T})$, причем

$$\iiint\limits_{(\overline{T})} \left(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\right) dV = \iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\, dV \pm \iiint\limits_{(\overline{T})} g(x,y,z)\, dV .$$

4. Пусть $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$. Если изменить значения функции $f(x,y,z)$ в точках какой-нибудь простой поверхности, лежащей в $(\overline{T})$ (с тем лишь условием, чтобы и измененная функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в $(\overline{T})$ и ее тройной интеграл по области $(\overline{T})$ равен $\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\, dV$. Таким образом, существование и величина тройного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией в точках конечного числа простых поверхностей.

5. Если область $(\overline{T})$, в которой задана функция $f(x,y,z)$, разложена простой поверхностью на две области $(\overline{T}_1)$ и $(\overline{T}_2)$, то из интегрируемости функции во всей области $(\overline{T})$ следует ее интегрируемость в областях $(\overline{T}_1)$ и $(\overline{T}_2)$, и обратно — из интегрируемости функции $f(x,y,z)$ в обеих областях $(\overline{T}_1)$ и $(\overline{T}_2)$ вытекает ее интегрируемость в области $(\overline{T})$. При этом

$$\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_{(\overline{T}_1)} f(x,y,z)\, dV + \iiint\limits_{(\overline{T}_2)} f(x,y,z)\, dV .$$

6. Пусть $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и $g(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и пусть всюду в $(\overline{T})$ выполняется неравенство $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$. Тогда

$$\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\, dV \le \iiint\limits_{(\overline{T})} g(x,y,z)\, dV .$$

7. Пусть $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и пусть всюду в $(\overline{T})$: $m \le f(x,y,z) \le M$. Тогда

$$mV \le \iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\, dV \le MV .$$

8. Теорема о среднем значении. Пусть $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$ и пусть всюду в $(\overline{T})$: $m \le f(x,y,z) \le M$. Тогда существует число μ, удовлетворяющее условию $m \le \mu \le M$, такое, что будет

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)\,dV = \mu \cdot V.$$

9. Частный случай теоремы о среднем значении. Если функция $f(x,y,z) \in C(\overline{T})$, то в $(\overline{T})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ,η,ζ), такая, что

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)\,dV = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot V.$$

10. Если функция $f(x,y,z) \in R(\overline{T})$, то и функция $|f(x,y,z)| \in R(\overline{T})$, причем

$$\left|\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)\,dV\right| \le \iiint\limits_{(T)} |f(x,y,z)|\,dV.$$

§4. Физическое истолкование тройного интеграла

Рассмотрим задачу о массе неоднородного тела. Пусть имеется неоднородное тело $(\overline{T})$ объема V. Пусть известна объемная плотность распределения массы $\rho(x,y,z)$ в $(\overline{T})$ (предполагаем, что $\rho(x,y,z) \in C(\overline{T})$). Требуется найти массу m этого тела.

▶ Произвольной сетью простых поверхностей разбиваем тело $(\overline{T})$ на части $(\overline{T}_k)$ с объемами V_k, $k = \overline{1,n}$. Предполагаем части $(\overline{T}_k)$ столь малыми, что объемную плотность распределения массы $\rho(x,y,z)$ в $(\overline{T}_k)$ можно считать постоянной, равной $\rho(x_k,y_k,z_k)$, где (x_k,y_k,z_k) — любая точка из $(\overline{T}_k)$. Тогда масса Δm_k части $(\overline{T}_k)$ будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k,y_k,z_k) \cdot V_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Масса m всего тела $(\overline{T})$ будет выражаться приближенно суммой

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) \cdot V_k . \tag{2}$$

Интуитивно ясно, что чем мельче будут части $(\overline{T}_k)$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая часть $(\overline{T}_k)$ тела однородной. Поэтому за массу тела $(\overline{T})$ естественно принять предел суммы (2) при $\lambda \to 0$, т. е.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) \cdot V_k = \iiint\limits_{(\overline{T})} \rho(x, y, z)\, dV . \blacktriangleleft \tag{3}$$

Таким образом, тройной интеграл выражает массу трехмерной области $(\overline{T})$, если подынтегральную функцию рассматривать как объемную плотность распределения массы в $(\overline{T})$. Такое истолкование тройного интеграла возможно для любой непрерывной и неотрицательной функции. Заметим еще, что вместо распределения массы можно говорить, например, о плотности распределения электрического заряда (определенного знака) в области $(\overline{T})$. В этом случае заряд во всей области также выразится тройным интегралом вида (3).

Соображениями, подобными вышеизложенным, можно получить формулы для механических приложений тройного интеграла. Нам нет надобности останавливаться на подробностях получения нижеследующих формул, ввиду их полной аналогии с соответствующими формулами для материальной плоской фигуры (или кривой поверхности).

а) Статические моменты относительно координатных плоскостей.

Если материальное тело, занимающее область $(\overline{T})$, имеет плотность $\rho(x, y, z)$, то

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(\overline{T})} \rho(x, y, z)\, z\, dV, \quad M_{xz} = \iiint\limits_{(\overline{T})} \rho(x, y, z)\, y\, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(\overline{T})} \rho(x, y, z)\, x\, dV . \tag{4}$$

б) Координаты центра масс.

Центром масс тела называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу m тела, то ее статические моменты будут равны соответствующим статическим моментам тела. Координаты центра масс определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{5}$$

Если тело $(\overline{T})$ — однородное, т. е. $\rho = \text{const}$, то для координат центра масс получаются формулы:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} x\,dV, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} y\,dV, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(T)} z\,dV. \tag{$\tilde{5}$}$$

в) Моменты инерции.

Моменты инерции тела $(\overline{T})$ с плотностью $\rho(x,y,z)$ относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$J_x = \iiint\limits_{(T)} \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dV, \quad J_y = \iiint\limits_{(T)} \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dV,$$

$$J_z = \iiint\limits_{(T)} \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dV, \tag{6}$$

а полярный момент инерции:

$$J_O = \iiint\limits_{(T)} \rho(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)\,dV. \tag{7}$$

Для геометрических моментов инерции получаются формулы:

$$J_x = \iiint\limits_{(T)} (y^2+z^2)\,dV, \quad J_y = \iiint\limits_{(T)} (x^2+z^2)\,dV, \quad J_z = \iiint\limits_{(T)} (x^2+y^2)\,dV,$$

$$J_O = \iiint\limits_{(T)} (x^2+y^2+z^2)\,dV. \tag{8}$$

§5. Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат

Начнем с области специального вида, ограниченной поверхностью (S), состоящей из трех частей: из цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит простой замкнутый самонепересекающийся контур (K), лежащий в плоскости Oxy и ограничивающий там область

(D_{xy}), и из двух поверхностей: $z = \underline{z}(x,y)$ и $z = \bar{z}(x,y)$, причем функции $\underline{z}(x,y)$ и $\bar{z}(x,y)$ предполагаются непрерывными в $(\overline{D}_{xy})$ и такими, что $\underline{z}(x,y) \le \bar{z}(x,y)$ (т. е. точка поверхности $z = \underline{z}(x,y)$ расположена не выше точки поверхности $z = \bar{z}(x,y)$, если эти две точки находятся на одной прямой, параллельной оси Oz, см. рис. 12.1). Такую область будем обозначать через $(\overline{T}_{xy})$. Плоскую область $(\overline{D}_{xy})$ можно рассматривать как проекцию области $(\overline{T}_{xy})$ на плоскость Oxy.

Пусть функция $f(x,y,z)$ задана в $(\overline{T}_{xy})$ и пусть для каждой закрепленной точки $(x,y) \in (\overline{D}_{xy})$ существует интеграл $\int\limits_{\underline{z}(x,y)}^{\bar{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ (этот интеграл представляет собой функцию от x и y, определенную в $(\overline{D}_{xy})$). Если существует интеграл $I_* = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} \left(\int\limits_{\underline{z}(x,y)}^{\bar{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$ и если существует $I = \iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz$, то $I = I_*$, т. е.

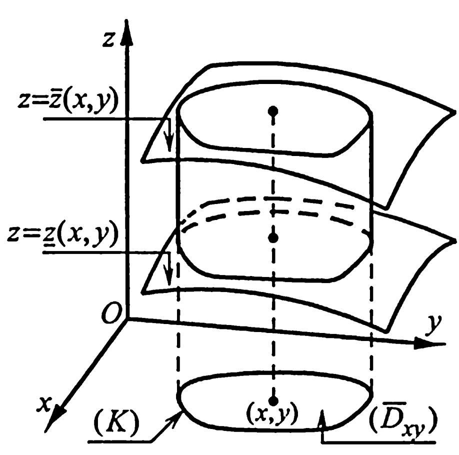


Рис. 12.1. К вычислению тройных интегралов в ДСК

$$\iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} \left(\int\limits_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy\,.$$

Можно доказать, что для функции $f(x,y,z)$, непрерывной в $(\overline{T}_{xy})$, интеграл I_* существует, ибо тогда $\int\limits_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ есть функция непрерывная от x и y в $(\overline{D}_{xy})$. Так как в этом случае тройной интеграл $I = \iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz$ также существует то получаем.

Если функция $f(x,y,z) \in C(\overline{T}_{xy})$, то

$$\iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} dxdy \int\limits_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (1)$$

Таким образом, тройной интеграл по области $(\overline{T}_{xy})$ выражается через двойной интеграл по проекции $(\overline{D}_{xy})$ этой области на плоскость Oxy.

Предположим теперь, что проекция $(\overline{D}_{xy})$ области $(\overline{T}_{xy})$ определяется неравенствами:

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x) \quad (\text{при фиксированном } x \text{ из } [a,b]) \end{cases}$$

(см. рис. 12.2). Тогда формула (1) примет вид

$$\iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} dy \int\limits_{z=\underline{z}(x,y)}^{z=\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (2)$$

Подобным же образом для области $(\overline{T}_{xy})$, определяемой неравенствами:

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \quad (\text{при фиксированном } y), \\ \underline{z}(x,y) \le z \le \overline{z}(x,y) \quad (\text{при фиксированных } x \text{ и } y) \end{cases}$$

получается формула

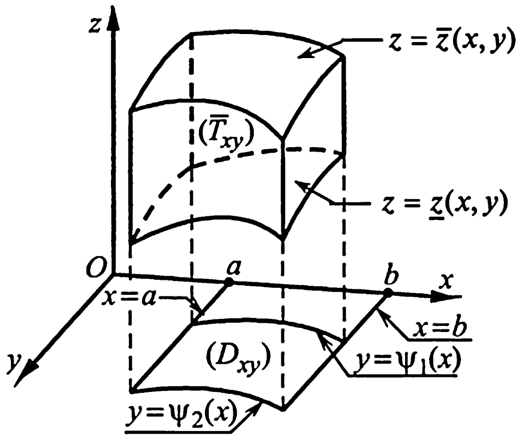


Рис. 12.2. К вычислению тройных интегралов в ДСК

$$\iiint\limits_{(\bar{T}_{xy})} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dx \int\limits_{z=\underline{z}(x,y)}^{z=\bar{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (3)$$

Замечание. Имеется еще четыре вида области, где тройной интеграл выражается через один повторный. Читатель сам легко напишет неравенства, определяющие эти области, и формулы, аналогичные формулам (2) и (3). Таким образом, мы имеем шесть формул для выражения тройного интеграла через повторный. В каждой из этих формул свой "порядок" интегрирования.

Если область $(\bar{T})$ такая, что с помощью цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны той или другой координатной оси, ее можно разбить на области шести упомянутых видов, то остается вычислить тройной интеграл по каждой из этих областей, пользуясь той или иной из известных нам шести формул, и сложить полученные результаты. Что касается выбора способа разбиения на части, то, естественно, надо стремиться к тому, чтобы число таких частей было наименьшим.

Пример 1. Вычислить объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Координатные плоскости разделяют эллипсоид на восемь одинаковых частей. Рассмотрим ту часть $(\bar{T}_1)$, которая расположена в первом октанте. Она ограничена плоскостями

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и поверхностью $z = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, т. е. область $(\overline{T}_1)$ определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \\ 0 \le z \le c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}. \end{cases}$$

(Среднее из этих неравенств следует из того, что плоскость Oxy пересекает эллипсоид по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.) Для объема части $(\overline{T}_1)$ имеем

$$V_1 = \iiint\limits_{(\overline{T}_1)} dV = \int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{z=0}^{z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= c\int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy =$$

$$= \frac{c}{b}\int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - y^2}\, dy .$$

Положив $\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = l$ и используя формулу

$$\int_0^l \sqrt{l^2 - y^2}\, dy = \left(\frac{l^2}{2}\arcsin\frac{y}{l} + \frac{y}{2}\sqrt{l^2 - y^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l} = \frac{\pi l^2}{4},$$

получим

$$V_1 = \frac{\pi c}{4b}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi bc}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{\pi abc}{6}.$$

Следовательно, объем всего эллипсоида равен $8V_1 = \frac{4}{3}\pi abc$.

Пример 2. Вычислить момент инерции прямоугольного параллелепипеда со сторонам a, b, c относительно одной из его вершин. Плотность $\rho = 1$.

Решение. Поместим параллелепипед в первом октанте прямоугольной системы координат так, чтобы стороны a, b, c совместились соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Тогда область $(\overline{T})$ параллелепипеда определится неравенствами: $\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b, \\ 0 \le z \le c. \end{cases}$ По формуле для полярного момента инерции получим

$$J_0 = \iiint\limits_{(\overline{T})} (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\,dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=c} dy = \int_0^a dx \int_0^b \left(x^2 c + y^2 c + \frac{c^3}{3} \right) dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2 cy + \frac{y^3}{3}c + \frac{c^3}{3}y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} dx = \int_0^a \left(x^2 bc + \frac{b^3 c}{3} + \frac{c^3 b}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}bc + \frac{b^3 c}{3}x + \frac{c^3 b}{3}x \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{abc}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

§6. Формула Остроградского

Пусть тело $(\overline{T}_{xy})$ ограничено поверхностью (S), состоящей из трех частей:

(S_1) (верх) — с уравнением $z = \overline{z}(x,y)$, причем $\overline{z}(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $\overline{z}'_x(x,y)$, $\overline{z}'_y(x,y)$ в области $(\overline{D}_{xy})$, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной простым самонепересекающимся замкнутым контуром (K);

(S_2) (низ) — с уравнением $z = \underline{z}(x,y)$, где $\underline{z}(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $\underline{z}'_x(x,y)$, $\underline{z}'_y(x,y)$ в $(\overline{D}_{xy})$;

(S_3) (боковая стенка). Это — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур (K) области $(\overline{D}_{xy})$ (см. рис. 12.3).

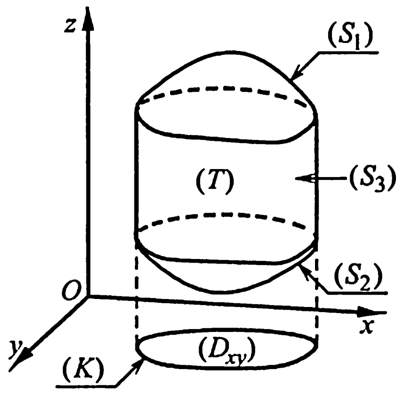


Рис. 12.3. К выводу формулы Остроградского

Пусть функция $R(x,y,z)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ в $(\overline{T}_{xy})$. Рассмотрим

$$I = \iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz. \tag{1}$$

Имеем

$$I = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} dxdy \int\limits_{z=\underline{z}(x,y)}^{z=\overline{z}(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} \left(R(x,y,z)\Big|_{z=\underline{z}(x,y)}^{z=\overline{z}(x,y)} \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} \left[R\big(x,y,\overline{z}(x,y)\big) \right] dxdy - \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} \left[R\big(x,y,\underline{z}(x,y)\big) \right] dxdy. \tag{2}$$

Рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\, dxdy. \tag{3}$$

Здесь интегрирование ведется по верхней стороне поверхности (S_1) (т. е. по внешней по отношению к телу $(\overline{T}_{xy})$ стороне поверхности (S_1)). Если выразить поверхностный интеграл (3) через двойной интеграл, то будем иметь

$$\iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} R\big(x,y,\overline{z}(x,y)\big) dxdy. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy\,. \tag{5}$$

Здесь интегрирование ведется по нижней стороне поверхности (S_2) (т. е. по внешней по отношению к телу $(\overline{T}_{xy})$ стороне поверхности (S_2)). Если выразить поверхностный интеграл (5) через двойной интеграл, то будем иметь

$$\iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy = -\iint\limits_{(\overline{D}_{xy})} R\big(x,y,\underline{z}(x,y)\big)\,dxdy\,. \tag{6}$$

Принимая во внимание соотношения (4) и (6), будем иметь вместо (2)

$$I = \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy\,. \tag{7}$$

Так как (S_3) — цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси Oz, то

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)\,dxdy = 0\,. \tag{8}$$

Прибавим к правой части (7) интеграл $\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)\,dxdy$. Получим

$$I = \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z)\,dxdy +$$

$$+\iint\limits_{(S_3)} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy\,, \tag{9}$$

причем $\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy$ берется по внешней стороне поверхности (S). Таким образом,

$$\iiint\limits_{(\overline{T}_{xy})} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy \tag{10}$$

((10) — малая формула Остроградского).

Мы доказали формулу (10) для области, рассмотренной выше, простой формы, а именно, для области вида $(\overline{T}_{xy})$. Нетрудно убедиться, что формула (10) будет верна для любой области $(\overline{T})$, которую можно разбить с помощью цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны оси Oz, на конечное число частей типа $(\overline{T}_{xy})$. Если мы напишем для каждой из этих частей формулу (10) и примем во внимание, что поверхностные интегралы по всем вспомогательным цилиндрическим поверхностям равны нулю, то, сложив все равенства, получим в левой части сумму интегралов по всем частям $(\overline{T})$, т. е. интеграл по всей области $(\overline{T})$, а в правой части — сумму поверхностных интегралов по всем частям (S), т. е. интеграл по всей замкнутой поверхности (S), ограничивающей область $(\overline{T})$.

Пусть теперь в $(\overline{T})$ заданы еще функции $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$, непрерывные там вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, и пусть область $(\overline{T})$ имеет соответствующий вид (т. е. может быть разбита на конечное число частей как типа $(\overline{T}_{yz})$, так и типа $(\overline{T}_{xz})$), то совершенно аналогичным образом можно установить, что

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\,dydz\,, \tag{11}$$

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\,dxdz\,. \tag{12}$$

Если область $(\overline{T})$ такая, что верны одновременно все три формулы (10), (11), (12), то, складывая соответствующие части этих формул, получим общую формулу Остроградского:

$$\iiint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy\,. \tag{13}$$

Подчеркнем еще раз, что (S) — замкнутая поверхность, ограничивающая область $(\overline{T})$, и что интеграл в правой части (13) берется по внешней стороне (S).

Пусть α, β и γ — углы, которые образует с осями координат нормаль к внешней стороне поверхности (S) (т. е. нормаль, направленная изнутри $(\overline{T})$ наружу). Заменяя в (13) поверхностный интеграл второго рода поверхностным интегралом первого рода, получим формулу Остроградского в виде

$$\iiint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\,.$$

§7. Вычисление объемов тел при помощи поверхностных интегралов (применение формулы Остроградского)

Пусть тело $(\overline{T})$ таково, что оно при помощи цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси Oz, разлагается на конечное число частей вида $(\overline{T}_{xy})$. Пусть (S) — замкнутая поверхность, ограничивающая $(\overline{T})$. Тогда по формуле (10) (§6):

$$\iint\limits_{(S)} z\,dxdy = \iiint\limits_{(\overline{T})} \frac{\partial z}{\partial z}\,dxdydz = \iiint\limits_{(\overline{T})} dxdydz = V.$$

Итак,

$$V = \iint\limits_{(S)} z\,dxdy \tag{I}$$

(интеграл берется по внешней стороне (S)); или

$$V = \iint\limits_{(S)} z\cos\gamma\,dS \tag{I$'$}$$

(γ — угол, который нормаль к внешней стороне (S) образует с осью Oz).

Пусть тело $(\overline{T})$ таково, что оно может быть разбито на конечное число частей как типа $(\overline{T}_{yz})$, так и типа $(\overline{T}_{xz})$. Тогда из формул (11) и (12) (§6) получаем

$$V = \iint\limits_{(S)} x\,dydz \tag{II}$$

или

$$V = \iint\limits_{(S)} x\cos\alpha\,dS; \tag{II$'$}$$

$$V = \iint\limits_{(S)} y\,dxdz \tag{III}$$

или

$$V = \iint\limits_{(S)} y\cos\beta\,dS. \tag{III$'$}$$

Если тело $(\overline{T})$ такое, что верны одновременно все три формулы, то

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy \tag{IV}$$

или

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS\,. \qquad \text{(IV')}$$

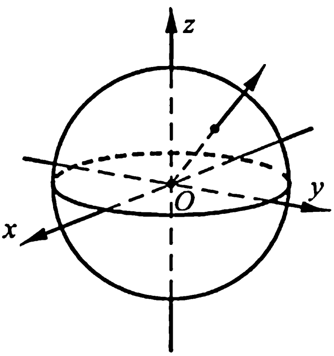


Рис. 12.4. К примеру

В формулах (I), (II), (III), (IV) интегралы берутся по внешней стороне (S). В формулах (I′), (II′), (III′), (IV′) α, β, γ — углы, которые образует с осями Ox, Oy, Oz соответственно нормаль, направленная изнутри $(\overline{T})$ наружу.

Пример. Найти объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Решение. Здесь нормаль к внешней стороне поверхности (S), проведенная в точке (x,y,z), совпадает с радиус-вектором этой точки. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{R}.$$

Следовательно, по формуле (IV′)

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R}\,dS = \frac{R}{3}\iint\limits_{(S)} dS = \frac{R}{3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§8. Объем тела в криволинейных координатах

Пусть имеются пространства xyz и $\xi\eta\zeta$ и пусть в этих пространствах даны тела $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$, ограниченные поверхностями (S) и (χ).

Пусть между точками областей $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$ установлено взаимно-однозначное соответствие формулами:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta), \\ y = y(\xi,\eta,\zeta), \\ z = z(\xi,\eta,\zeta). \end{cases} \qquad (1)$$

(Система (1) однозначно разрешима относительно ξ, η, ζ.) ξ, η, ζ — *криволинейные координаты* точек области $(\overline{T})$.

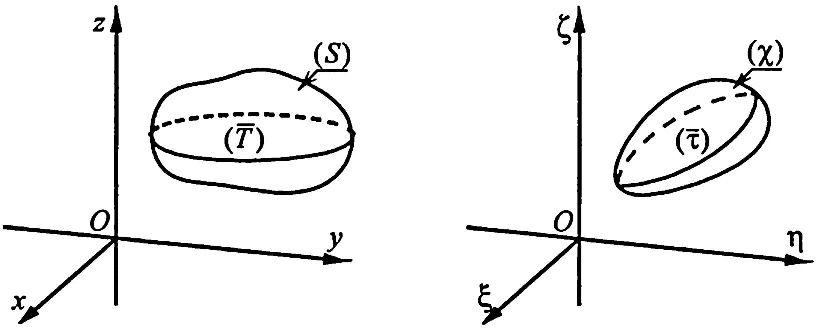


Рис. 12.5

Задача. Зная область $(\overline{\tau})$ и зная формулы преобразования (1) области $(\overline{\tau})$ в область $(\overline{T})$, найти объем V_T тела $(\overline{T})$.

Теорема. Пусть:

1) функции $x(\xi,\eta,\zeta)$, $y(\xi,\eta,\zeta)$, $z(\xi,\eta,\zeta)$ определены, непрерывны в $(\overline{\tau})$ и имеют там непрерывные частные производные первого и смешанные производные второго порядка;

2) якобиан $J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\zeta \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\zeta \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\zeta \end{vmatrix}$ всюду в $(\overline{\tau})$ сохраняет знак;

3) точкам поверхности (χ) соответствуют точки (S), и наоборот;

4) на поверхностях (χ) и (S) нет особых точек (для поверхности (S), например, это означает, что (S) задается параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ причем функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области своего задания, и в каждой точке этой области отличен от нуля хотя бы один из трех определителей матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$).

Тогда

$$V_T = \iiint\limits_{(\tau)} |J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi d\eta d\zeta. \qquad (*)$$

(Принимаем без доказательства, ибо оно аналогично плоскому случаю.)

Замечания.

1. Формула (*) остается верной и тогда, когда взаимная однозначность между $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$ нарушается в точках, лежащих на конечном числе простых поверхностей. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi,\eta,\zeta)$ остается ограниченным в $(\overline{\tau})$.

2. Так как $|J(\xi,\eta,\zeta)|$ есть функция непрерывная в $(\overline{\tau})$, то, применяя к тройному интегралу, стоящему в правой части (*), частный случай теоремы о среднем, получим

$$V_T = \left|J(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})\right| \cdot V_\tau, \qquad (**)$$

где $(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})$ — некоторая точка из $(\overline{\tau})$, а V_τ — объем тела $(\overline{\tau})$. Заметим, что находить V_T по формуле (**) нельзя, так как такая точка $(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})$ в $(\overline{\tau})$ есть, но ее трудно указать.

Из соотношения (**) следует: $\dfrac{V_T}{V_\tau} = \left|J(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta})\right|$. Станем сжимать область $(\overline{\tau})$ по всем направлениям в некоторую точку (ξ,η,ζ). (Тогда точка $(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\zeta}) \to (\xi,\eta,\zeta)$.) В силу непрерывности отображения область $(\overline{T})$ будет при этом сжиматься в точку (x,y,z), которая соответствует точке (ξ,η,ζ). Следовательно,

$$|J(\xi,\eta,\zeta)| = \lim_{V_\tau \to 0} \frac{V_T}{V_\tau}.$$

Таким образом, модуль якобиана есть коэффициент искажения объема при переходе из пространства $O\xi\eta\zeta$ в пространство $Oxyz$.

Примеры криволинейных координат.

I. Цилиндрические координаты. Пусть точка $M(x,y,z)$ — любая точка пространства. Положение точки M вполне определяется заданием полярных координат r и φ ее проекции A на плоскость Oxy и заданием z. Числа r, φ, z — это *цилиндрические координаты* точки M. Границы изменения цилиндрических координат такие: $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Очевидно, что

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

(Так выражаются декартовы координаты точки M через цилиндрические.) Имеем

$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Итак, $J(r,\varphi,z) = r$ (r — неотрицательная величина).

II. Сферические координаты. Пусть точка M — любая точка пространства. *Сферическими координатами* точки M называются числа ρ, θ, φ, где $\rho = |\overrightarrow{OM}|$; θ — угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM}$; φ — угол между полуплоскостью Oxz и полуплоскостью OAM. (Точка A — проекция точки M на плоскость Oxy.) Границы изменения сферических координат такие: $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Имеем:

$$r = \rho\sin\theta, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

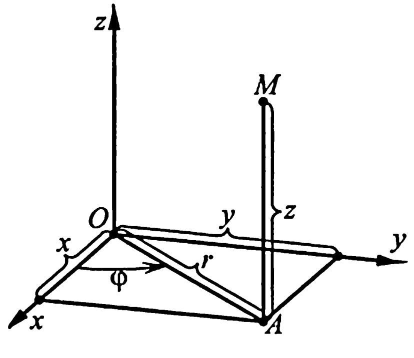


Рис. 12.6

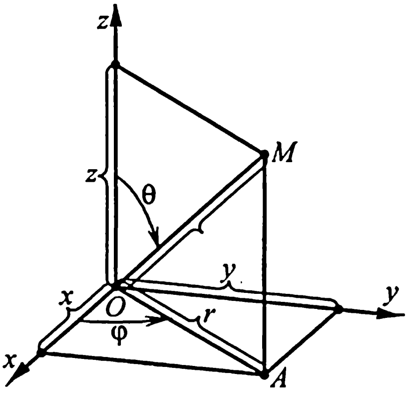


Рис. 12.7

Поэтому

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Имеем, далее,

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad J(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin\theta\,.$$

III. Эллипсоидальные координаты. Так называются координаты ρ, θ, φ точки M, связанные с ее декартовыми координатами x, y, z так:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\rho\cos\theta. \end{cases}$$

(Заметим, что при $a = b = c = 1$ получаем сферические координаты точки M.) Имеем

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin\theta\,.$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{xyz}{abc} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)\,.$$

Решение. Из уравнения поверхности, ограничивающей тело $(\overline{T})$, следует:

1) если $z > 0$, то должно быть $x \cdot y > 0$. Это означает, что две части тела $(\overline{T})$ расположены в I и III октантах.

2) если $z < 0$, то должно быть $x \cdot y < 0$. Это означает, что две другие части тела $(\overline{T})$ расположены в VI и VIII октантах.

В эллипсоидальных координатах уравнение поверхности, ограничивающей тело $(\overline{T})$, таково:

$$\rho^6 = \rho^3 \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^3 = \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi .$$

(При сокращении могли потерять начало координат, но оно осталось.) Найдем объем той четверти тела, которая лежит в I октанте. Интересующая нас четверть тела определяется неравенствами

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le \sqrt[3]{\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi} .$$

Значит,

$$V_T = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}} abc\rho^2 \sin\theta \, d\rho =$$

$$= \frac{4abc}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4abc}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{4abc}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{abc}{6}.$$

§9. Замена переменных в тройном интеграле

Теорема. Пусть между точками областей $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$ установлено взаимно-однозначное соответствие формулами:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta), \\ y = y(\xi,\eta,\zeta), \\ z = z(\xi,\eta,\zeta). \end{cases} \tag{1}$$

Пусть выполняются условия 1), 2), 3), 4) предыдущей теоремы (см. §8). Тогда, если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в $(\overline{T})$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(\overline{\tau})} f\big[x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)\big]\cdot\big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|\,d\xi d\eta d\zeta. \qquad (2)$$

▶ Обозначим тройной интеграл, стоящий в левой части (2), через I, а тройной интеграл, стоящий в правой части, — через I_*. Отметим, что оба эти тройных интеграла существуют, ибо их подынтегральные функции непрерывны соответственно в областях $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$. Составим сумму Римана σ для интеграла I. Для этого нужно разбить $(\overline{T})$ произвольной сетью простых поверхностей на части $(\overline{T}_k)$, $k=\overline{1,n}$, и в каждой части $(\overline{T}_k)$ взять произвольную точку (x_k,y_k,z_k). И тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)V_{T_k}.$$

Заметим, что, проводя в $(\overline{T})$ сеть простых поверхностей, мы тем самым будем проводить сеть простых поверхностей в $(\overline{\tau})$, так что $(\overline{\tau})$ разобьется на части $(\overline{\tau}_k)$. По формуле для объема тела в криволинейных координатах имеем

$$V_{T_k} = \iiint\limits_{(\overline{\tau}_k)} \big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|\,d\xi d\eta d\zeta.$$

Применяя к тройному интегралу, стоящему в правой части, частный случай теоремы о среднем, получим

$$V_{T_k} = \big|J(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k,\overline{\zeta}_k)\big|\cdot V_{\tau_k}, \quad \text{где точка} \quad (\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k,\overline{\zeta}_k)\in(\overline{\tau}_k).$$

А тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\big|J(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k,\overline{\zeta}_k)\big|\cdot V_{\tau_k}.$$

Так как тройной интеграл I существует, то $\sigma\to I$ при $\lambda\to 0$ при любом выборе точек (x_k,y_k,z_k) в $(\overline{T}_k)$. (Здесь λ — ранг дробления $(\overline{T})$.) В частности, это будет так и тогда, когда мы в качестве точек (x_k,y_k,z_k) в $(\overline{T}_k)$ возьмем точки, соответствующие точкам $(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k,\overline{\zeta}_k)$, т. е. когда положим

$$\begin{cases} x_k = x(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k), \\ y_k = y(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k), \\ z_k = z(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k). \end{cases}$$

При таком выборе точек (x_k, y_k, z_k) в $(\overline{T}_k)$ интегральная сумма Римана σ будет иметь вид

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left[x(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k), y(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k), z(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k)\right] \cdot \left|J(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k)\right| \cdot V_{\tau_k}.$$

Сумма, стоящая здесь в правой части, есть сумма Римана для тройного интеграла I_*. Так как тройной интеграл I_* существует, то $\sigma \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ (здесь λ_* — ранг дробления $(\overline{\tau})$). Отметим, что, измельчая дробление $(\overline{\tau})$, мы тем самым будем измельчать дробление $(\overline{T})$ (и наоборот), ибо функции, осуществляющие взаимно-однозначное отображение областей $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$ друг на друга, есть непрерывные функции. Значит, $(\lambda_* \to 0) \Leftrightarrow (\lambda \to 0)$. А тогда $\sigma \to I_*$ при $\lambda \to 0$. Но так как $\sigma \to I$ при $\lambda \to 0$, то $I = I_*$. ◀

Замечание. Формула (2) остается верной и тогда, когда взаимная однозначность между точками областей $(\overline{T})$ и $(\overline{\tau})$ нарушается в точках, лежащих на конечном числе простых поверхностей. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi, \eta, \zeta)$ остается ограниченным в $(\overline{\tau})$.

§10. Понятие об интегралах высшей кратности

Определение. Пусть $(\overline{P})$ — прямоугольный параллелепипед из $\mathbf{R}^n$ $(n > 3)$, определяемый так:

$$(\overline{P}) = \begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1, \\ a_2 \le x_2 \le b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n \le x_n \le b_n. \end{cases}$$

Его *объемом* называется число $\prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ (сравните с одномерным, двухмерным и трехмерным случаями).

Пусть $(\overline{T})$ — произвольное тело из $\mathbf{R}^n$ $(n > 3)$. Заключим $(\overline{T})$ в параллелепипед $(\overline{P})$. Разложим $(\overline{P})$ на частичные параллелепипеды и обозначим через A сумму объемов тех из них, которые целиком содержатся в (P), а через B — сумму объемов тех, которые имеют с $(\overline{P})$ хотя бы одну общую точку. Назовем *диагональю* параллелепипеда $(\overline{P})$ число $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}$ (сравните с плоским и трехмерным случаями). Пусть λ — наибольшая из диагоналей частичных параллелепипедов нашего дробления $(\overline{P})$.

Если существует общий предел

$$V = \lim_{\lambda \to 0} A = \lim_{\lambda \to 0} B,$$

то он называется *объемом* тела $(\overline{T})$.

Владея понятием объема тела $(\overline{T})$ в n-мерном пространстве, можно обычным способом определить n-кратный интеграл.

Пример. Найти объем $V_n(R)$ n-мерного шара (R — радиус шара).

Решение. Известно, что $V_1(R) = 2R$, $V_2(R) = \pi R^2$, $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Очевидно, что $V_n(R) = \int\limits_{(\overline{T}_n(R))}\dots\int dx_1 dx_2 \dots dx_n$, где $\left(\overline{T}_n(R)\right)$ есть множество тех точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \le R^2$. Отсюда

$$V_n(R) = \int\limits_{-R}^{R} dx_1 \underbrace{\int\dots\int}_{\left(\overline{T}_{n-1}\left(\sqrt{R^2 - x_1^2}\right)\right)} dx_2 \dots dx_n,$$

т. е. $V_n(R) = \int\limits_{-R}^{R} V_{n-1}\left(\sqrt{R^2 - x_1^2}\right)dx_1$. Покажем, что $V_n = k_n R^n$, где k_n — коэффициенты, не зависящие от R. Для $n = 1, 2, 3$ это так, причем $k_1 = 2$, $k_2 = \pi$, $k_3 = \frac{4}{3}\pi$. Допустим, что $V_{n-1}(R) = k_{n-1}R^{n-1}$.

Тогда $V_n(R) = \int\limits_{-R}^{R} k_{n-1}(R^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_1$. Положим здесь $x_1 = R\sin t$.

Тогда

$$V_n(R) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} k_{n-1}(R^2 - R^2\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} R\cos t\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_n(R) = k_{n-1}R^n \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t\,dt.$$

Итак, действительно $V_n = k_n R^n$, причем $k_n = k_{n-1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n t\,dt$. Положим

$$I_n = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n t\,dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n-1} t\,d\sin t.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, находим

$$I_n = \Big[\sin t\,\cos^{n-1} t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(n-1)\cos^{n-2} t\cdot\sin^2 t\,dt.$$

Допустим, что $n > 1$. Тогда $\Big[\sin t\,\cos^{n-1} t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$ и, следовательно,

$$I_n = (n-1)\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n-2} t\cdot(1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Если $n-2>1$, то $I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2}I_{n-4}$; если $n-4>1$, то $I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4}I_{n-6}$, . Будем иметь окончательно

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases} I_0, & \text{если } n \text{ — четное;}\\ I_1, & \text{если } n \text{ — нечетное.}\end{cases}$$

Так как $I_0 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$, а $I_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 2$, то

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} \pi, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ 2, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Положим

$$\sigma_n = \begin{cases} \pi, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ 2, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Тогда $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\sigma_n$ и, следовательно, $k_n = k_{n-1}\frac{(n-1)!!}{n!!}\sigma_n$. Таким образом, получаем

$$k_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}k_{n-1}\sigma_n, \quad k_{n-1} = \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}k_{n-2}\sigma_{n-1},$$

$$k_{n-2} = \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}k_{n-3}\sigma_{n-2}, \quad \ldots, \quad k_2 = \frac{1!!}{2!!}k_1\sigma_2.$$

Отсюда

$$k_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}k_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n = \frac{(n-2)!!}{n!!}k_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n =$$

$$= \frac{(n-2)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}k_{n-3}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n = \frac{(n-3)!!}{n!!}k_{n-3}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_n =$$

$$= \ldots = \frac{1}{n!!}k_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{n-1}\sigma_n.$$

Но $k_1 = 2 = \sigma_1$. Значит, $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}\sigma_n = \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Здесь $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n+1}{2}$. Поэтому окончательно находим

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{n!!}R^n,$$

откуда, в частности,

$$V_1(R) = 2R, \qquad V_4(R) = \frac{\pi^2}{2} R^4,$$
$$V_2(R) = \pi R^2, \qquad V_5(R) = \frac{8}{15}\pi^2 R^5.$$
$$V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

§11. Примеры и задачи

Пример 1. Вычислить $I = \iiint\limits_{(T)} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где $(\overline{T})$ — область, ограниченная поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Здесь

$$(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 \le z \le 1-x-y. \end{cases}$$

Имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} dy \int_{z=0}^{z=1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Пример 2. Вычислить $I = \iiint\limits_{(T)} xyz\, dxdydz$, где $(\overline{T})$ — область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

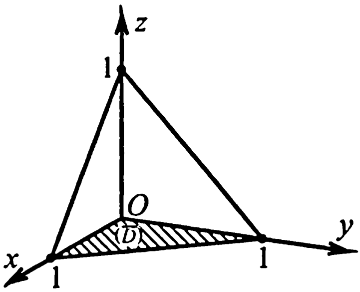


Рис. 12.8. К примеру 1

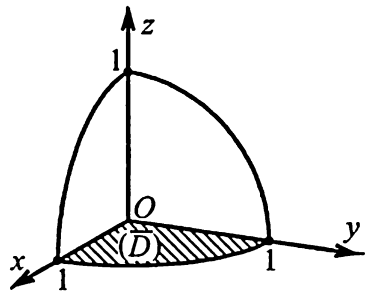


Рис. 12.9. К примеру 2

Решение. Здесь

$$(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

Имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy \int_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \left(xy\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{2}(1-x^2-y^2)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x(1-x^2)}{4}y^2 - \frac{x}{2}\cdot\frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x(1-x^2)^2 - \frac{1}{8}x(1-x^2)^2 \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\int_0^1 (1-x^2)^2 d(1-x^2) = -\frac{1}{16}\cdot\frac{(1-x^2)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

Пример 3. Вычислить $I = \iiint\limits_{(\overline{T})} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$, где $(\overline{T})$ — область, ограниченная поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Станем вычислять I в эллипсоидальных координатах. Имеем

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\rho\cos\theta, \end{cases}$$

где $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$. Тогда $J(\rho,\theta,\varphi) = abc\rho^2\sin\theta$ и, следовательно,

$$I = abc\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\rho=0}^{\rho=1}\rho^4 d\rho = \frac{abc}{5}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{4\pi}{5}abc.$$

Пример 4. Вычислить $I = \iiint\limits_{(\overline{T})}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где $(\overline{T})$ — область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

Решение. Здесь $(\overline{T})$ — ограничено частью конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и частью плоскости $z=1$. На плоскость Oxy $(\overline{T})$ проектируется в круг $x^2+y^2\le 1$. Станем выражать I в цилиндрических координатах. В цилиндрических координатах $(\overline{T})$ определяется соотношениями

$$(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le r \le 1, \\ r \le z \le 1. \end{cases}$$

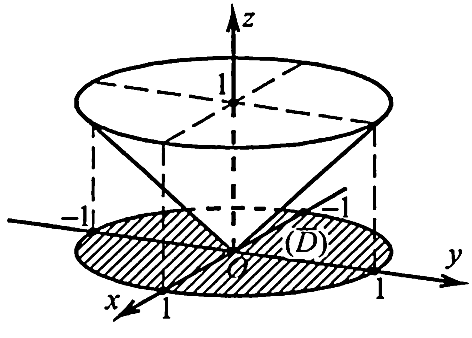


Рис. 12.10. К примеру 4

Имеем

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=1} dr \int\limits_{z=r}^{z=1} r^2 dz = 2\pi \int\limits_{r=0}^{r=1} (r^2 z)\Big|_{z=r}^{z=1} dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{r=1} r^2(1-r)\,dr = 2\pi\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 5. Вычислить $I = \iiint\limits_{(\overline{T})} xyz\,dxdydz$, где $(\overline{T})$ — область, расположенная в первом октанте: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, и ограниченная поверхностями

$$z = \frac{x^2+y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2+y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n).$$

Решение. Область $(\overline{T})$ представляет собой область типа $(\overline{T}_{xy})$. Она ограничена: с боков цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси Oz; снизу — поверхностью $z = \dfrac{x^2+y^2}{n}$, сверху — поверхностью $z = \dfrac{x^2+y^2}{m}$. Проекцией $(\overline{T})$ на плоскость Oxy является $(\overline{D})$, ограниченная линиями $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $y = \dfrac{a^2}{x}$, $y = \dfrac{b^2}{x}$. Имеем

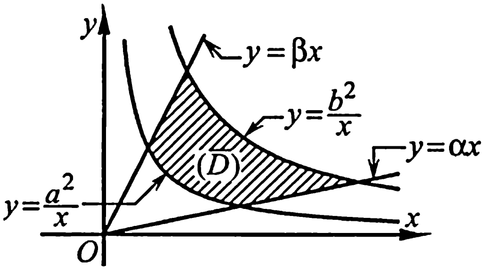


Рис. 12.11. К примеру 5

$$I=\iint\limits_{(\overline{D})}\left(\int\limits_{z=\frac{x^2+y^2}{n}}^{z=\frac{x^2+y^2}{m}} xyz\,dz\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{(\overline{D})} xy\left(\frac{(x^2+y^2)^2}{m^2}-\frac{(x^2+y^2)^2}{n^2}\right)dxdy\,.$$

В двойном интеграле по области $(\overline{D})$ сделаем замену переменных, положив

$$xy=u,\quad \frac{y}{x}=v\quad\Rightarrow\quad x=u^{1/2}v^{-1/2},\quad y=u^{1/2}v^{1/2}\,.$$

Образом области $(\overline{D})$ в плоскости Ouv будет прямоугольник $(\overline{\Delta})=\begin{cases}a^2\le u\le b^2,\\ \alpha\le v\le\beta.\end{cases}$ При такой замене

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2}\\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}\,.$$

Поэтому

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2}du\int\limits_{\alpha}^{\beta}u\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\cdot u^2\left(v+\frac{1}{v}\right)^2\frac{1}{2v}dv=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\int\limits_{a^2}^{b^2}u^3du\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(v+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^3}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2\ln\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

Пример 6. Найти среднее значение функции $f(x,y,z)=x^2+$ $+y^2+z^2$ в области $x^2+y^2+z^2\le x+y+z$.

Решение. Имеем

$$x^2+y^2+z^2 \le x+y+z \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4}.$$

Значит, $(\overline{T})$ — шар радиуса $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром в точке $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Объем шара $V_T = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Среднее значение $f_{\text{ср}}$ функции $f(x,y,z)$ в $(\overline{T})$ определяется соотношением

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{V_T}\iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\iiint\limits_{(\overline{T})}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$$

Вычислять интеграл $\iiint\limits_{(\overline{T})}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ будем в сферических координатах, а именно, положим

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y-\frac{1}{2}=\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z-\frac{1}{2}=\rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\frac{1}{2}+\rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\frac{1}{2}+\rho\cos\theta, \end{cases}$$

где $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Уравнение поверхности, ограничивающей $(\overline{T})$, будет иметь вид $\rho^2=\frac{3}{4}$, так что $0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$f_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\rho=0}^{\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\rho^2+\frac{3}{4}+\rho\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\rho\cos\theta\right]\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho \quad\Rightarrow f_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}\left[\left[\frac{\rho^5}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho^3}{3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\rho^4}{4}\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{\rho^4}{4}\cos\theta\right]\right|_{\rho=0}^{\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}}d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{9\sqrt{3}}{160}+\frac{3\sqrt{3}}{32}\right)+\frac{9}{16}\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{9}{16}\cos\theta\right]d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\left[\frac{3\sqrt{3}}{20}\sin\theta+\frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta\right]d\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20}\cdot 2 = \frac{6}{5}.$$

Пример 7. Оценить интеграл $I = \iiint\limits_{(\overline{T})}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, где $(\overline{T})$ — область, ограниченная поверхностью $x^2+y^2+z^2=R^2$; $a^2+b^2+c^2>R^2$.

Решение. Имеем $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ — определена и непрерывна в замкнутой области $(\overline{T})$, ибо единственная точка (a,b,c), в которой знаменатель обращается в нуль, лежит вне $(\overline{T})$. (У нас, по условию, $a^2+b^2+c^2>R^2$.) По теореме Вейерштрасса $f(x,y,z)$ достигает в $(\overline{T})$ своих наименьшего m и наибольшего M значений. Следовательно, в $(\overline{T})$

$$m \le f(x,y,z) \le M.$$

А тогда

$$mV_T \le \iiint\limits_{(\overline{T})} f(x,y,z)\,dxdydz \le MV_T.$$

У нас $(\overline{T})$ — шар радиуса R. Поэтому $V_T = \frac{4}{3}\pi R^3$. А тогда

$$\frac{4}{3}\pi R^3\cdot m \le I \le \frac{4}{3}\pi R^3\cdot M.$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi(x,y,z)=\frac{1}{f(x,y,z)}$. Отметим, что $\psi(x,y,z)\in C(\overline{T})$ и, следовательно, достигает в $(\overline{T})$ своих наименьшего $\frac{1}{M}$ и наибольшего $\frac{1}{m}$ значений. (Так как $f(x,y,z)$ —

положительная функция, то $m > 0$ и $M > 0$.) Значит, мы найдем наименьшее m и наибольшее M значения функции $f(x,y,z)$ в $(\overline{T})$, если найдем соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $\psi(x,y,z)$ в $(\overline{T})$. Имеем

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{f(x,y,z)} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

$$\psi'_x = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

$$\psi'_y = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

$$\psi'_z = \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Видим, что одновременно $\psi'_x = 0$, $\psi'_y = 0$, $\psi'_z = 0$ лишь в точке (a,b,c). Но точка (a,b,c) лежит вне $(\overline{T})$. Следовательно, у функции $\psi(x,y,z)$ внутри $(\overline{T})$ нет критических точек. Значит, $\psi(x,y,z)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на границе области $(\overline{T})$, т. е. на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y,z) = \psi(x,y,z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) =$$

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2).$$

Имеем

$$\Phi'_x = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} + 2\lambda x,$$

$$\Phi'_y = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} + 2\lambda y,$$

$$\Phi'_z = \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} + 2\lambda z.$$

Из системы

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0, \\ \Phi'_y = 0, \\ \Phi'_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

находим точки, подозрительные на условный экстремум. Это точки

$$N_1\left(\frac{aR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{bR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{cR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

$$N_2\left(\frac{-aR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-bR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-cR}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

Имеем

$$\psi(N_1) = \sqrt{R^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2R\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2} - R,$$

$$\psi(N_2) = \sqrt{R^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2R\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2} + R.$$

Из выражений для $\psi(N_1)$ и $\psi(N_2)$ видим, что $\psi(N_1)$ — наименьшее, а $\psi(N_2)$ — наибольшее значения функции $\psi(x,y,z)$ в $(\overline{T})$. Таким образом, получаем

$$m = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} + R}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} - R}.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} + R} \le \iiint\limits_{(T)} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \le$$

$$\le \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} - R}.$$

Пример 8. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, где f — непрерывная функция.

Решение. Перейдем к сферическим координатам $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$ Для области $(\overline{T})$, ограниченной поверхностью $x^2+y^2+z^2 = t^2$, будем иметь: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le t$. Поэтому

$$F(t) = \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho = 2\cdot 2\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho = 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho,$$

откуда, по теореме Барроу, находим

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

Пример 9. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iiint\limits_{(\overline{T})} f(xyz)\,dxdydz$, где f — дифференцируемая функция, а $(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le x \le t, \\ 0 \le y \le t, \\ 0 \le z \le t. \end{cases}$

Решение. Имеем

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t f(xyz)\,dz. \qquad (*)$$

$$F'(t) = \int_0^t dy \int_0^t f(tyz)\,dz + \int_0^t \left[\int_0^t dy \int_0^t f(xyz)\,dz\right]_t' dx.$$

Но

$$\left[\int_0^t dy \int_0^t f(xyz)\,dz\right]_t' = \int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t \left[\int_0^t f(xyz)\,dz\right]_t' dy =$$

$$= \int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t f(xyt)\,dy.$$

Поэтому

$$F'(t)=\int_0^t dy\int_0^t f(tyz)\,dz+\int_0^t dx\int_0^t f(xtz)\,dz+\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)\,dy\,.$$

В соотношении (*) к внутреннему интегралу $\int_0^t f(xyz)\,dz$ применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^t f(xyz)\,dz=\begin{bmatrix} u=f(xyz) & \Rightarrow & du=f'(xyz)\cdot xy\,dz \\ dv=dz & \Rightarrow & v=z \end{bmatrix}=$$

$$=zf(xyz)\Big|_{z=0}^{z=t}-\int_0^t xyzf'(xyz)\,dz=tf(xyt)-\int_0^t xyzf'(xyz)\,dz\,.$$

И, следовательно, для $F(t)$ будем иметь вместо (*)

$$F(t)=t\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)\,dy-\int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyzf'(xyz)\,dz\,. \qquad (\alpha)$$

Если для $F(t)$ взять выражение через повторный интеграл в виде $F(t)=\int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t f(xyz)\,dy$ и к внутреннему интегралу $\int_0^t f(xyz)\,dy$ применить формулу интегрирования по частям, то получим

$$F(t)=t\int_0^t dx\int_0^t f(xtz)\,dz-\int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)\,dy\,. \qquad (\beta)$$

И, наконец, если для $F(t)$ взять выражение через повторный интеграл в виде $F(t)=\int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t f(xyz)\,dx$ и к внутреннему интегралу $\int_0^t f(xyz)\,dx$ применить формулу интегрирования по частям, то получим

$$F(t)=t\int_0^t dy\int_0^t f(tyz)\,dz-\int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)\,dx\,. \qquad (\gamma)$$

Сложим левые и правые части равенств (α), (β) и (γ). Получим

$$3F(t) = t\underbrace{\left[\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)\,dy + \int_0^t dx\int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t dy\int_0^t f(tyz)\,dz\right]}_{=F'(t)} -$$

$$-\underbrace{\left[\int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyzf'(xyz)\,dz + \int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)\,dy + \int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)\,dx\right]}_{=3\iiint\limits_{(T)} xyzf'(xyz)\,dxdydz},$$

или

$$3F(t) + 3\iiint\limits_{(T)} xyzf'(xyz)\,dxdydz = t\cdot F'(t) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F'(t) = \frac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{(T)} xyzf'(xyz)\,dxdydz\right].$$

Пример 10. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

где (S) — внешняя сторона границы куба $(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le a, \\ 0 \le z \le a. \end{cases}$

Решение.

$$I = \iint\limits_{(S)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{(T)} (2x + 2y + 2z)\,dxdydz =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x + y + z)\,dz = 2\int_0^a dx\int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=a} dy =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2}\right)dy = 2\int_0^a \left(axy + a\frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2}y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = 2\left(a^2 \frac{x^2}{2} + a^3 x \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = 2\left(\frac{a^4}{2} + a^4 \right) = 3a^4 .$$

Пример 11. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S)} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy ,$$

где (S) — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение.

$$I = \iint\limits_{(S)} (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma)\, dS = \iiint\limits_{(\overline{T})} 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz ,$$

где $(\overline{T})$ — шар $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$. Станем вычислять I в сферических координатах $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$ Область $(\overline{T})$ можно представить в виде $(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 \le \rho \le a. \end{cases}$ Поэтому

$$I = 3\int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} a^5 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5} \pi a^5 .$$

Пример 12. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S)} (x - y + z)\, dydz + (y - z + x)\, dzdx + (z - x + y)\, dxdy ,$$

где (S) — внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1 .$$

Решение. Пусть $(\overline{T})$ — тело, ограниченное поверхностью (S). По формуле Остроградского получаем

$$I = \iiint\limits_{(\overline{T})} (1 + 1 + 1)\, dxdydz = 3\iiint\limits_{(\overline{T})} dxdydz .$$

Вычисление тройного интеграла станем осуществлять с помощью замены переменных, а именно, положим

$$\begin{cases} u = x - y + z, \\ v = y - z + x, \\ w = z - x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u + v), \\ y = \dfrac{1}{2}(v + w), \\ z = \dfrac{1}{2}(w + u) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Образом тела $(\overline{T})$ в пространстве $Ouvw$ будет тело $(\overline{\tau})$, ограниченное поверхностью $|u| + |v| + |w| = 1$. Часть тела $(\overline{\tau})$, расположенная в первом октанте, представима в виде $\begin{cases} 0 \le u \le 1, \\ 0 \le v \le 1 - u, \\ 0 \le w \le 1 - u - v. \end{cases}$ Поэтому

$$J = 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} w\Big|_{w=0}^{w=1-u-v} dv =$$

$$= 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} (1 - u - v)\, dv = 6 \int_0^1 \left(v - uv - \frac{v^2}{2} \right)\Bigg|_{v=0}^{v=1-u} du =$$

$$= 6 \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - u)^2 du = -3 \cdot \frac{(1 - u)^3}{3}\Bigg|_{u=0}^{u=1} = 1.$$

Пример 13. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S_6)} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS,$$

где (S_6) — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

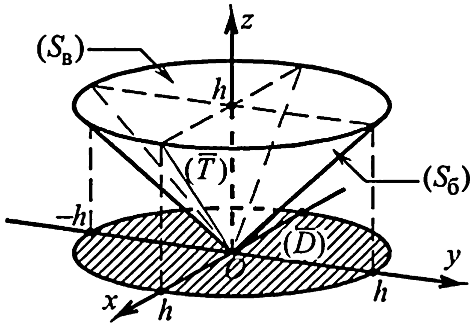


Рис. 12.12. К примеру 13

Решение. Так как поверхность $(S_б)$ незамкнутая, то применить сразу формулу Остроградского для вычисления I нельзя. Добавим к точкам поверхности $(S_б)$ точки поверхности $(S_в)$, т. е. точки круга $x^2 + y^2 \le h^2$, расположенного в плоскости $z = h$. Получим замкнутую поверхность $(S_б) \cup (S_в)$, ограничивающую тело $(\overline{T})$. Теперь выражение для интеграла I может быть представлено в виде

$$I = \iint\limits_{(S_б)\cup(S_в)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS -$$

$$- \iint\limits_{(S_в)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS. \qquad (*)$$

Так как $(S_б) \cup (S_в)$ — замкнутая поверхность, ограничивающая тело $(\overline{T})$, то к первому интегралу, стоящему в правой части равенства (*), можно применить формулу Остроградского. Будем иметь

$$\iint\limits_{(S_б)\cup(S_в)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS = \iiint\limits_{(\overline{T})} 2(x + y + z)\, dxdydz.$$

Тройной интеграл станем вычислять в цилиндрических координатах

$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$ Тело $(\overline{T})$ будет представимо в виде: $(\overline{T}) = \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le r \le h, \\ r \le z \le h. \end{cases}$

Поэтому

$$\iiint\limits_{(T)} 2(x+y+z)\,dxdydz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r\,dr \int\limits_{z=r}^{z=h} \left[r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z\right] dz =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r\left[r(\cos\varphi+\sin\varphi)z + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_{z=r}^{z=h} dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \left[r(h-r)(\cos\varphi+\sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right] r\,dr =$$

$$= \underbrace{2\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^h r^2(h-r)\,dr}_{=0} + 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \left(\frac{h^2 r}{2} - \frac{r^3}{2}\right) dr = \pi\frac{h^4}{2}.$$

Второй интеграл, стоящий в правой части равенства (*), выразим через двойной интеграл по области $(\overline{D})$, где $(\overline{D})$ — круг $x^2+y^2 \le h^2$. На поверхности $(S_в)$ имеем: $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $z^2 = h^2$. Поэтому

$$\iint\limits_{(S_в)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS = \iint\limits_{(\overline{D})} h^2 dxdy = h^2\cdot\pi h^2 = \pi h^4.$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$I = \pi\frac{h^4}{2} - \pi h^4 = -\pi\frac{h^4}{2}.$$

Дополнение.
Понятия о несобственных кратных интегралах

I. Интегралы от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $(\overline{D}) \subset \mathbf{R}^2$ всюду, за исключением, быть может, точки $N_0(x_0,y_0)$, в окрестности которой функция $f(x,y)$ не ограничена ($(\overline{D})$ — область конечного диаметра). Пусть функция $f(x,y)$ такая, что $f(x,y) \in R\big((\overline{D}) \setminus (\omega)\big)$, где (ω) — любая достаточно малая область, содержащаяся в $(\overline{D})$ и содержащая точку $N_0(x_0,y_0)$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy\,. \tag{1}$$

Если окажется, что при уменьшении (ω) по всем направлениям, т. е. при "стягивании" её к особой точке N_0 интеграл (1) стремится к некоторому пределу, не зависящему от способа стягивания, то этот предел называется ***несобственным интегралом*** от неограниченной функции и обозначается обычным символом

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy\,. \tag{2}$$

$$\Big(\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \lim_{(\omega)\to N_0} \iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy\,.\Big)$$

Если предел (2) конечный, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же он не существует или бесконечный, то расходящимся.

Совершенно подобным же образом вводится понятие о тройном несобственном интеграле от неограниченной функции.

В качестве ***примера*** рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m} \quad (m>0)\,, \tag{3}$$

где $(\overline{D})$ — круг $0 \le x^2+y^2 \le a^2$. Здесь $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}$ определена и непрерывна в $(\overline{D})$ всюду, за исключением точки $N_0(0,0)$.

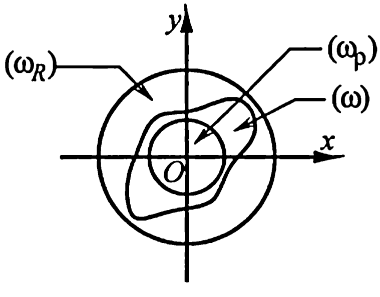


Рис. 12.13

В окрестности точки $N_0(0,0)$ $f(x,y)$ неограниченная. Точка $N_0(0,0)$ — единственная особая точка. Выделим особую точку областью (ω). Пусть (ω_ρ) — наибольший круг радиуса ρ с центром в точке $N_0(0,0)$, целиком расположенный внутри (ω), а (ω_R) —

наименьший круг радиуса R с центром в точке $N_0(0, 0)$, содержащий внутри себя область (ω). Имеем $\big((\overline{D}) \setminus (\omega_R)\big) \subset \big((\overline{D}) \setminus (\omega)\big) \subset$ $\subset \big((\overline{D}) \setminus (\omega_\rho)\big)$. Так как функция $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}$ положительная, то будем иметь

$$\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega_R)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m} \le \iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m} \le \iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega_\rho)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}. \quad (4)$$

Перейдя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega_R)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=R}^{r=a} \frac{r\,dr}{r^m} = 2\pi \int\limits_{r=R}^{r=a} \frac{dr}{r^{m-1}} = 2\pi \cdot \frac{r^{2-m}}{2-m}\Bigg|_{r=R}^{r=a};$$

$$\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega_\rho)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=\rho}^{r=a} \frac{r\,dr}{r^m} = 2\pi \int\limits_{r=\rho}^{r=a} \frac{dr}{r^{m-1}} = 2\pi \cdot \frac{r^{2-m}}{2-m}\Bigg|_{r=\rho}^{r=a}.$$

Станем стягивать произвольным образом по всем направлениям область (ω) к точке $N_0(0, 0)$. Тогда одновременно будут стремиться к нулю R и ρ. Замечаем, что если $m < 2$, то

$$\lim_{R\to+0} 2\pi \cdot \frac{r^{2-m}}{2-m}\Bigg|_{r=R}^{r=a} = \lim_{R\to+0} 2\pi \cdot \left[\frac{a^{2-m}}{2-m} - \frac{R^{2-m}}{2-m}\right] = 2\pi \cdot \frac{a^{2-m}}{2-m}$$

и

$$\lim_{\rho\to+0} 2\pi \cdot \frac{r^{2-m}}{2-m}\Bigg|_{r=\rho}^{r=a} = \lim_{\rho\to+0} 2\pi \cdot \left[\frac{a^{2-m}}{2-m} - \frac{\rho^{2-m}}{2-m}\right] = 2\pi \cdot \frac{a^{2-m}}{2-m}.$$

Если же $m > 2$, то

$$\lim_{R\to+0} 2\pi \cdot \int\limits_{r=R}^{r=a} \frac{dr}{r^{m-1}} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to+0} 2\pi \cdot \int\limits_{r=\rho}^{r=a} \frac{dr}{r^{m-1}} = +\infty.$$

При $m=2$:

$$\lim_{R\to+0} 2\pi \cdot \int_{r=R}^{r=a} \frac{dr}{r} = \lim_{R\to+0} 2\pi(\ln a - \ln R) = +\infty$$

и

$$\lim_{\rho\to+0} 2\pi \cdot \int_{r=\rho}^{r=a} \frac{dr}{r} = \lim_{\rho\to+0} 2\pi(\ln a - \ln\rho) = +\infty.$$

Таким образом, приходим к выводу, что несобственный интеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}$ сходится, если $m<2$, и расходится, если $m\ge 2$.

(Совершенно аналогичным образом можно установить, что несобственный интеграл

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{dxdydz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^m}, \tag{5}$$

где $(\overline{T})$ — любая конечная трехмерная область, внутри которой находится начало координат, будет сходящимся при $m<3$ и расходящимся при $m\ge 3$.)

Замечание. Если внутри области (D) имеется несколько особых точек или даже кусочно-гладких кривых (конечной длины), в каждой точке которых подынтегральная функция $f(x,y)$ обращается в бесконечность, то все особые точки или особые кривые исключаются областями (ω), которые стягиваются к этим точкам или кривым. Если при этом интеграл по оставшейся области стремится к конечному пределу, не зависящему от способа стягивания, то будем иметь сходящийся несобственный интеграл.

В качестве ***примера*** рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \tag{6}$$

где $(\overline{D})$ — круг $0\le x^2+y^2\le a^2$.

В данном случае имеем особую кривую (c), а именно окружность $x^2 + y^2 = = a^2$. Возьмем внутри (D) некоторую замкнутую кривую (l), и пусть (ω) — область, заключенная между (c) и (l). Заметим, что в каждой точке области $(\overline{D}) \setminus (\omega)$ функция $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ непрерывна

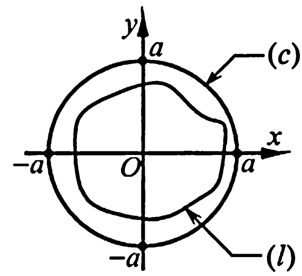


Рис. 12.14

и положительна. Пусть ρ и R соответственно есть наименьшее и наибольшее расстояние от начала координат до кривой (l); (ω_ρ) — круг радиуса ρ с центром в начале координат; (ω_R) — круг радиуса R с центром в начале координат. Имеем $(\overline{\omega}_\rho) \subset \big((\overline{D}) \setminus (\omega)\big) \subset (\overline{\omega}_R)$. Так как $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ положительная, то

$$\iint\limits_{(\overline{\omega}_\rho)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \le \iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \le \iint\limits_{(\overline{\omega}_R)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \tag{7}$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{(\overline{\omega}_\rho)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi\left(a - \sqrt{a^2 - \rho^2}\right),$$

$$\iint\limits_{(\overline{\omega}_R)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi\left(a - \sqrt{a^2 - R^2}\right).$$

При любом стягивании области (ω) к линии (c) будет: $\rho \to a - 0$ и $R \to a - 0$. Следовательно,

$$\lim_{(\omega)\to(c)} \iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2\pi a.$$

Вывод. Несобственный интеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ сходится, и его значение равно $2\pi a$.

Посредством соображений, аналогичных тем, какими были исследованы несобственные интегралы (3) и (6), можно доказать следующую **теорему**.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в каждой точке области $(\overline{D}) \setminus (\omega)$. (Через (ω) мы обозначаем здесь совокупность областей, выделяющих все особые точки или кривые в области $(\overline{D})$). Если интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy$ стремится к некоторому пределу при каком-нибудь специальном способе стягивания области (ω), то он стремится к тому же пределу при всяком способе стягивания этой области (к особым точкам или особым кривым).

Из этой теоремы вытекает **следствие**.

Если интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy$ от неотрицательной функции ограничен, т. е. $\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy \le L$, где L — некоторое положительное число, то несобственный интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ сходится.

Действительно, всегда можно выбрать такой способ стягивания области (ω), при котором интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})\setminus(\omega)} f(x,y)\,dxdy$ монотонно возрастает. Но монотонно возрастающая переменная величина, ограниченная сверху, имеет конечный предел.

Вот еще одно важное **следствие** из предыдущего.

Пусть функции $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$ — непрерывные и неотрицательные в $(\overline{D}) \setminus (\omega)$, и пусть везде в этой области

$$\varphi(x,y) \le g(x,y). \tag{8}$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dxdy$ следует сходимость несобственного интеграла $\iint\limits_{(\overline{D})} \varphi(x,y)\,dxdy$.

В самом деле, если несобственный интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})} g(x,y)\,dxdy$ сходится, то интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})\setminus(\omega)} g(x,y)\,dxdy$ — ограниченный, а потому и интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})\setminus(\omega)} \varphi(x,y)\,dxdy$, в силу (8), также ограниченный, а следовательно, интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})} \varphi(x,y)\,dxdy$ сходится.

Отметим, что если функция $f(x,y)$ неположительная в $(\bar{D})\setminus(\omega)$, то к функции $-f(x,y)$ применимы все предыдущие результаты.

Пусть теперь функция $f(x,y)$ не имеет постоянного знака в $(\bar{D})\setminus(\omega)$. В этом случае для исследования сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{(\bar{D})} f(x,y)\,dxdy$ может пригодиться следующая **теорема**:

Если несобственный интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})} |f(x,y)|\,dxdy$ — сходящийся, то несобственный интеграл $\iint\limits_{(\bar{D})} f(x,y)\,dxdy$ также будет сходящимся.

▶ Для доказательства положим:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(|f(x,y)| + f(x,y)\right),$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{1}{2}\left(|f(x,y)| - f(x,y)\right).$$

Очевидно,

$$0 \le \varphi_1(x,y) \le |f(x,y)|, \quad 0 \le \varphi_2(x,y) \le |f(x,y)|.$$

Поэтому из сходимости интеграла $\iint\limits_{(\bar{D})} |f(x,y)|\,dxdy$ вытекает сходимость интегралов $\iint\limits_{(\bar{D})} \varphi_1(x,y)\,dxdy$ и $\iint\limits_{(\bar{D})} \varphi_2(x,y)\,dxdy$. А так как $\varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = f(x,y)$, то и интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ будет сходящимся. ◀

В качестве примера применения последней теоремы приведем следующий простой достаточный признак сходимости несобственного интеграла от функции $f(x,y)$, которая обращается в бесконечность лишь в одной точке $N(a,b)$ в области $(\overline{D})$ и непрерывна во всех остальных точках этой области.

Если можно найти такие постоянные числа A и m, причем $m < 2$, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялось неравенство

$$|f(x,y)| \le \frac{A}{\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^m}, \tag{9}$$

то несобственный интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ сходится (доказать самим, в качестве упражнения).

Замечание. Для тройного несобственного интеграла условие (9) будет таким:

$$|f(x,y,z)| \le \frac{A}{\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right)^m}, \quad m < 3.$$

II. Интегралы по бесконечной области.

Пусть $(\overline{D})$ — бесконечная область, например, вся плоскость Oxy или ее часть, ограниченная кривой, уходящей в бесконечность. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке этой области. Возьмем любую конечную область $(\overline{\Omega})$, целиком входящую в $(\overline{D})$, и рассмотрим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)\,dxdy. \tag{10}$$

Представим себе, что область $(\overline{\Omega})$, оставаясь в $(\overline{D})$, расширяется неограниченно таким образом, что каждая точка области $(\overline{D})$ рано или поздно попадает в $(\overline{\Omega})$. (Мы этот процесс будем обозначать так: $(\overline{\Omega}) \to (\overline{D})$.)

Если интеграл $\iint\limits_{(\overline{\Omega})} f(x,y)\,dxdy$ стремится при этом к некоторому пределу, не зависящему от способа расширения $(\overline{\Omega})$ к $(\overline{D})$, то такой предел называется *несобственным интегралом* от функции $f(x,y)$ по бесконечной области $(\overline{D})$:

$$\lim_{(\overline{\Omega})\to(\overline{D})} \iint\limits_{(\overline{\Omega})} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy\,. \qquad (11)$$

Если предел (11) конечный, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же он не существует или бесконечный, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Совершенно аналогично определяется несобственный тройной интеграл по бесконечной трехмерной области.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(\overline{D})} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad (12)$$

где $(\overline{D})$ — вся плоскость Oxy.

Пусть $(\overline{\Omega})$ — произвольная конечная область, содержащая внутри себя точку $(0, 0)$; пусть ρ и R — соответственно наименьшее и наибольшее расстояние от начала координат до границы области $(\overline{\Omega})$. Пусть $(\overline{\Omega}_\rho)$ — круг радиуса ρ с центром в точке $(0, 0)$, а $(\overline{\Omega}_R)$ — круг радиуса R с центром в точке $(0, 0)$. Имеем $(\overline{\Omega}_\rho) \subset (\overline{\Omega}) \subset (\overline{\Omega}_R)$. Так как $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ положительная, то

$$\iint\limits_{(\overline{\Omega}_\rho)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint\limits_{(\overline{\Omega})} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint\limits_{(\overline{\Omega}_R)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,. \qquad (13)$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{(\overline{\Omega}_\rho)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-\rho^2})\,,$$

$$\iint\limits_{(\overline{\Omega}_R)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-R^2})\,.$$

При неограниченном расширении области $(\overline{\Omega})$ к $(\overline{D})$ будет одновременно $\rho \to +\infty$, $R \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{(\overline{\Omega})\to(\overline{D})} \iint\limits_{(\Omega)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi\,.$$

Вывод. Несобственный интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ сходится, и его значение равно π.

Для несобственный интегралов по бесконечной области справедливы следующие **теоремы**.

1) Если $f(x,y) \geq 0$ и интеграл $\iint\limits_{(\Omega)} f(x,y)\,dxdy$ остается ограниченным при расширении области $(\overline{\Omega})$, то несобственный интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ сходится.

2) Если $\varphi(x,y) \geq 0$, $g(x,y) \geq 0$ и $\varphi(x,y) \leq g(x,y)$ в $(\overline{D})$, то из сходимости $\iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dxdy$ следует сходимость $\iint\limits_{(\overline{D})} \varphi(x,y)\,dxdy$.

3) Если интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} |f(x,y)|\,dxdy$ сходится, то сходится и интеграл $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$.

Эти теоремы (относящиеся также к несобственным интегралам в трехмерных бесконечных областях) доказываются таким же образом, как аналогичные им теоремы для несобственных интегралов от неограниченных функций.

Замечание. Для кратных несобственных интегралов справедливо утверждение, обратное утверждению 3): из сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ следует сходимость интеграла $\iint\limits_{(\overline{D})} |f(x,y)|\,dxdy$ (см. Г.М. Фихтенгольц, “Курс дифференциального и интегрального исчислений”, т. III, с. 265).

Глава 13

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§1. Определение равномерной сходимости несобственных интегралов

Пусть функция $f(x,y)$ задана в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ будет представлять собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$ (в дальнейшем будем обозначать эту функцию через $I(y)$, $y \in [c,d]$).

Утверждение, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$, означает следующее: при каждом закрепленном y из $[c,d]$

$$\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx .$$

Следовательно,

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{A} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0, \text{ или } \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

А это означает, что для каждого y из $[c,d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $M > 0$, такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Важно заметить, что число $M > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$, и для каждого y из $[c,d]$ оно будет, вообще говоря, своим, то есть M зависит и от ε, и от y: $M = M(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $M > 0$, зависящее только от ε (т. е. одно и то же для всех y из $[c,d]$), такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ называется *равномерно сходящимся относительно параметра y на* $[c,d]$.

Совершенно аналогично вводится понятие равномерной сходимости несобственных интегралов второго рода. Например, пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a \le x < b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ (a, b, c, d — конечные числа).

Пусть при каждом y из $[c,d]$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится. Ясно, что тогда $\int_a^b f(x,y)\,dx$ будет представлять собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Утверждение, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$, означает следующее. При каждом закрепленном y из $[c,d]$

$$\int_a^{\beta} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} \int_a^{b} f(x,y)\,dx \Leftrightarrow \int_a^{b} f(x,y)\,dx - \int_a^{\beta} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\beta}^{b} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} 0 \Leftrightarrow \int_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\gamma\to +0]{} 0$$

(здесь положено $\beta = b-\gamma \Rightarrow \gamma = b-\beta$). А это означает, что для каждого y из $[c,d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, такое, что как только $0 < \gamma < \delta$, так сейчас же $\left|\int_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

И здесь важно отметить, что число $\delta > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$ и для каждого y из $[c,d]$ оно будет, вообще говоря, своим, т. е. δ зависит и от ε, и от y: $\delta = \delta(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, зависящее только от ε (*т. е. одно и то же для всех y из* $[c,d]$), такое, что как только $0 < \gamma < \delta$, так сейчас же $\left|\int_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$, то *несобственный интеграл* $\int_a^{b} f(x,y)\,dx$ *называется равномерно сходящимся относительно параметра y на* $[c,d]$.

§2. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d; \end{cases}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I(y)$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

▶ Возьмем *любое* y_0 из $[c,d]$ и закрепим его. Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, поэтому взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, зависящее только от ε, такое, что при всяком A, удовлетворяющем условию $A > M$, сразу для всех $y \in [c,d]$ будет

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Выберем и закрепим какое-нибудь A, удовлетворяющее условию $A > M$. Положив $\Psi_A(y) = \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx$, неравенство (1) сразу для всех $y \in [c,d]$ можно записать в виде

$$|I(y) - \Psi_A(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

$$\left[I(y) - \Psi_A(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx = \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right].$$

Но $\Psi_A(y)$ — собственный интеграл, зависящий от параметра y. По теореме о непрерывности собственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\Psi_A(y) \in C([c,d])$, а значит, по теореме Кантора, функция $\Psi_A(y)$ будет равномерно непрерывной на $[c,d]$.

Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек y' и y'' из $[c,d]$, для которых $|y'' - y'| < \delta$, будет $|\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Для разности значений функции $I(y)$ в точках y' и y'' имеем

$$I(y'') - I(y') = [I(y'') - \Psi_A(y'')] + [\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')] + [\Psi_A(y') - I(y')] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |I(y'') - I(y')| \le |I(y'') - \Psi_A(y'')| + |\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')| +$$

$$+ |\Psi_A(y') - I(y')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В частности, полагая $y' = y_0$, $y'' = y$, где $y \in [c,d]$ — любое, но такое, что $|y - y_0| < \delta$, будем иметь $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$. Последнее означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0. Так как у нас точка y_0 — любая из $[c,d]$, то заключаем, что $I(y) \in C([c,d])$. ◀

§3. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d; \end{cases}$

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx, \qquad (1)$$

причем несобственный интеграл, стоящий в правой части (1), сходится.

▶ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, поэтому взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, зависящее только от ε, такое, что при всяком A, удовлетворяющем условию $A > M$, сразу для всех $y \in [c,d]$ будет справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Выберем и закрепим какое-нибудь A, удовлетворяющее условию $A > M$. Полагая, как и раньше, $\Psi_A(y) = \int\limits_a^A f(x,y)\,dx$, предыдущее неравенство сразу для всех $y \in [c,d]$ можно записать в виде

$$\left|I(y)-\Psi_A(y)\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Так как $I(y)\in C([c,d])$ и $\Psi_A(y)\in C([c,d])$, то $I(y)\in R([c,d])$, $\Psi_A(y)\in R([c,d])$. Поскольку имеет место равенство

$$\int_c^d I(y)\,dy-\int_c^d \Psi_A(y)\,dy=\int_c^d\left[I(y)-\Psi_A(y)\right]dy,$$

то

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy-\int_c^d \Psi_A(y)\,dy\right|\le\int_c^d\left|I(y)-\Psi_A(y)\right|dy<\frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c)=\varepsilon.$$

Таким образом, получили: при любом A, удовлетворяющем условию $A>M$, оказывается $\left|\int_c^d I(y)\,dy-\int_c^d \Psi_A(y)\,dy\right|<\varepsilon$. Последнее означает, что

$$\int_c^d I(y)\,dy=\lim_{A\to\infty}\int_c^d \Psi_A(y)\,dy \tag{2}$$

(именно так, ибо первый интеграл от A не зависит). Но $\Psi_A(y)=\int_a^A f(x,y)\,dx$ — собственный интеграл, зависящий от параметра y. По теореме об интегрировании по параметру под знаком собственного интеграла можем написать

$$\int_c^d \Psi_A(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^A f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^A\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Теперь соотношение (2) может быть записано в виде

$$\int_c^d I(y)\,dy=\lim_{A\to\infty}\int_a^A\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Нами установлено существование написанного здесь предела. Но тогда мы должны обозначать этот предел так:

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Таким образом, мы доказали сходимость несобственного интеграла, стоящего в правой части (1), и справедливость равенства (1). ◀

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d, \end{cases}$ непрерывна там и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$;

2) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$;

3) $\Psi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда:

1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c,d]$;

2) $I'(y) = \Psi(y)$, т. е. $\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$;

3) $I'(y) \in C([c,d])$.

▶ Так как $f'_y(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d \end{cases}$ и $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, то $\Psi(y) \in C([c,d])$ (см. теорему §2) и $\int\limits_c^d \Psi(y)\,dy$ существует. В частности, существует $\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy$ для любого z, удовлетворяющего условию $c \le z \le d$. По теореме §3 имеем

$$\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy = \int\limits_c^z \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^z f'_y(x,y)\,dy \right) dx .$$

Но $\int\limits_c^z f'_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big|_{y=c}^{y=z} = f(x,z) - f(x,c)$. Поэтому

$$\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x,z)\,dx}_{=I(z)} - \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)\,dx}_{=I(c)} = I(z) - I(c),$$

откуда

$$I(z) = \int\limits_c^z \Psi(y)\,dy + I(c). \tag{1}$$

В правой части последнего равенства мы имеем интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Следовательно, у правой части равенства (1) производная по z существует и равна $\Psi(z)$ (см. теорему Барроу). Но тогда существует производная по z и y левой части равенства (1), причем

$$I'(z) = \Psi(z). \tag{2}$$

Равенство (2) установлено для любого $z \in [c,d]$. Оно может быть записано и так: $I'(y) = \Psi(y)$, $y \in [c,d]$.

Таким образом, доказано, что

1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c,d]$;

2) $I'(y) = \Psi(y)$, $y \in [c,d]$;

3) $I'(y) \in C([c,d])$, ибо $\Psi(y) \in C([c,d])$. ◀

§5. Признак равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d \end{cases}$ и непрерывна там;

2) функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна в $[a, +\infty)$;

3) $|f(x,y)| \le \varphi(x)$ при всех значениях y из $[c,d]$ и $x \in [a, +\infty)$.

Тогда, если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

▶ Сходимость (и притом абсолютная) несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ при каждом y из $[c,d]$ следует из признака сравнения.

Возьмем любое A, удовлетворяющее условию $A > a$, и закрепим его. Затем возьмем любое B, удовлетворяющее условию $B > A$. Имеем при всех значениях y из $[c,d]$

$$\left|\int\limits_A^B f(x,y)\,dx\right| \le \int\limits_A^B |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_A^B \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда в пределе при $B \to +\infty$ при всех значениях y из $[c,d]$ получаем

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \le \int\limits_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

По условию, $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, поэтому

$$\int\limits_a^A \varphi(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \iff \left[\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^A \varphi(x)\,dx\right] \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \iff$$

$$\iff \int\limits_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

Последнее означает, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\int\limits_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$. Отметим, что здесь M зависит только от ε. В силу (1), при $A > M$ и подавно будет $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$. А это означает, что

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$. ◀

Замечание. Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы, совершенно аналогичные теоремам §2—§5.

§6. Примеры к главе 13

Рассмотрим несколько примеров применения доказанных теорем к вычислению интегралов.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cdot \sin xy\,dx\,. \tag{1}$$

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cdot \sin xy\,dx = -\frac{e^{-x}}{1+y^2}\cdot(\sin xy + y\cos xy)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{y}{1+y^2}\,. \tag{2}$$

Используя равенство (2), найдем величины некоторых других интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на *любом* промежутке $[c,d]$. В самом деле, имеем: $\left|e^{-x}\cdot\sin xy\right| \le e^{-x}$ для любого $y\in[c,d]$ и для всех $x\in[0,+\infty)$;

интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$, т.е. сходится, а тогда, по теореме §5, $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$.

Отметим еще, что функция $f(x,y) = e^{-x}\sin xy$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ c\le y\le d.\end{cases}$ Тогда по теореме §2 имеем

$$I(y) \in C([c,d]) \Rightarrow I(y) \in R([c,d]) \Rightarrow I(y) \in R([0,z]).$$

(здесь положено $c = 0$, $d = z$, где z — любое конечное). По теореме §3

$$\int_0^z \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin xy \, dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^z e^{-x} \sin xy \, dy \right) dx.$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (2) по y от 0 до z, будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^z e^{-x} \sin xy \, dy \right) dx = \int_0^z \frac{y dy}{1+y^2}. \qquad (3)$$

Но $\int_0^z e^{-x} \sin xy \, dy = -e^{-x} \frac{\cos xy}{x} \Big|_{y=0}^{y=z} = e^{-x} \frac{1-\cos xz}{x}$ (это равенство установлено для $x \neq 0$; оно верно и при $x = 0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\lim_{x \to 0} \int_0^z e^{-x} \sin xy \, dy = \int_0^z \lim_{x \to 0} (e^{-x} \sin xy) \, dy = 0;$$

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} \frac{1-\cos xz}{x} = \lim_{x \to 0} e^{-x} \frac{2}{x} \sin^2 \frac{xz}{2} = 0).$$

Тогда (3) для любого конечного z примет вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos xz}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(1+z^2).$$

2. Имеем: $f'_y(x,y) = (e^{-x} \sin xy)'_y = xe^{-x} \cos xy$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ $\int_0^{+\infty} f'_y(x,y) \, dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos xy \, dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$. В самом деле, $\left| xe^{-x} \cos xy \right| \le xe^{-x}$ для любого $y \in [c,d]$ и $x \in [0, +\infty)$; $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$,

т.е. сходится. Поэтому $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$. Тогда по теореме § 4

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin xy\,dx\right)'_y = \int\limits_0^{+\infty}(e^{-x}\sin xy)'_y\,dx = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx.$$

Дифференцируя по y обе части равенства (2), получим для любого конечного y

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}, \quad y\in[c,d], \tag{4}$$

где $[c,d]$ — любой, но такой, что $1\le c<d$.

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2y}, \quad y\in[c,d]. \tag{5}$$

И здесь, используя равенство (5), найдем величины еще некоторых интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$. Действительно, имеем: $\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2+1}$, $y\in[c,d]$ и $x\in[0,+\infty)$; $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, т.е. сходится. Следовательно, $I(y)$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Отметим еще, что функция $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ c\le y\le d.\end{cases}$ Тогда

$$I(y) \in C([c,d]) \Rightarrow I(y) \in R([c,d]) \Rightarrow I(y) \in R([1, z])$$

(здесь положено $c = 1$, $d = z$, где z — любое конечное, $z > 1$).

По теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §3)

$$\int_1^z \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx .$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (5) по y от 1 до z, будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx = \int_1^z \frac{\pi}{2y} dy . \tag{6}$$

Но $\displaystyle\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \bigg|_{y=1}^{y=z} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x}$ (это равенство установлено для $x \neq 0$; оно верно и при $x = 0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\lim_{x \to 0} \int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} = \int_1^z \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy = \int_1^z \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \bigg|_1^z = 1 - \frac{1}{z},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{(z-1)x}{x^2 + z}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(z-1)x}{x^2 + z}}{x} = 1 - \frac{1}{z}).$$

Тогда (6) для любого конечного $z \geq 1$ примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln z .$$

2. Имеем: $\displaystyle f_y'(x,y) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)_y' = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$ непрерывна

в области $\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ $(1 \leq c < d)$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx$

сходится равномерно относительно y на $[c,d]$. В самом деле, для $y \in [c,d]$ и $x \in [0,+\infty)$ $\left|\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right| \le \dfrac{2d}{(x^2+1)^2}$, а $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{2d}{(x^2+1)^2}dx$ сходится. Тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (см. §4)

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}\right)'_y = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_y dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx.$$

Дифференцируя по y обе части равенства (5), получим

$$-2\int\limits_0^{+\infty} \frac{y\,dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\pi}{2y^2},$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3}, \quad y \in [c,d]. \tag{7}$$

Аналогично обосновывается возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла левой части (7). Тогда, дифференцируя по y обе части равенства (7), находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}dx = -\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{y^4}, \quad y \in [c,d] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3\pi}{16}\cdot\frac{1}{y^5}, \quad y \in [c,d].$$

Пример 3. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \quad |y|<1. \tag{8}$$

▶ Возьмем любую точку $y_0 \in (-1,1)$. Всегда можно указать число $\gamma_0 > 0$, такое, что будет $[-1+\gamma_0,\, 1-\gamma_0] \subset (-1,1)$ и точка $y_0 \in (-1+\gamma_0,\, 1-\gamma_0)$.

$-1 \quad -1+\gamma_0 \qquad 0 \qquad y_0 \quad 1-\gamma_0 \quad 1 \quad y$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \ln\left(\dfrac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos x} = 2y$ конечен, то функция

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & x\in[0,\pi/2), \quad y\in[-1+\gamma_0,\ 1-\gamma_0], \\ 2y, & x=\pi/2, \quad y\in[-1+\gamma_0,\ 1-\gamma_0], \end{cases}$$

где $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos x}$, непрерывна в области $\begin{cases} 0\le x\le\pi/2, \\ -1+\gamma_0\le y\le 1-\gamma_0, \end{cases}$ причем

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \tilde{f}(x,y)\,dx.$$

Последнее выражение для $I(y)$ — собственный интеграл, зависящий от параметра y.

Имеем: $\tilde{f}'_y(x,y) = \dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 0\le x\le\pi/2, \\ -1+\gamma_0\le y\le 1-\gamma_0. \end{cases}$ По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла, находим

$$I'(y) = \int_0^{\pi/2}\frac{2\,dx}{1-y^2\cos^2 x} = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t \quad \Rightarrow & x=\operatorname{arctg} t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{2\,dt}{(1-y^2)+t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$y\in[-1+\gamma_0,\ 1-\gamma_0].$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{(1-y^2)+t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1-y^2}} \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$y \in [-1+\gamma_0, 1-\gamma_0].$$

В частности, существует $I'(y_0)$, причем $I'(y_0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-y_0^2}}$. У нас точка y_0 — любая из $(-1, 1)$. Следовательно, $I'(y) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$. Тогда

$$I(y) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \pi \cdot \arcsin y + C, \quad y \in (-1, 1). \tag{9}$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Из (8) видим, что $I(0) = 0$. Положив теперь в обеих частях равенства (9) $y = 0$, получим $0 = 0 + C$, откуда $C = 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$I(y) = \pi \cdot \arcsin y, \quad y \in (-1, 1). \blacktriangleleft \tag{10}$$

Пример 4. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{11}$$

▶ Имеем:

1) $f(x,y) = e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ c \le y \le d, \end{cases}$

где $[c,d]$ — любой промежуток, и имеет там непрерывную частную производную $f_y'(x,y) = -xe^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy$.

2) Интеграл $I(y)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy\,dx$ ($\alpha>0$) сходится (и даже равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$).

3) Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx=-\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\,dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$.

В самом деле, $\left|f'_y(x,y)\right|=\left|-xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\right|\le xe^{-\alpha x^2}$ для любого $y\in[c,d]$ и для всех $x\in[0,+\infty)$, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}d(-\alpha x^2)=-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{2\alpha},$$

т. е. сходится.

По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$I'(y)=-\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=\sin xy & \Rightarrow du=y\cos xy\,dx,\\ dv=-xe^{-\alpha x^2}dx & \Rightarrow v=\dfrac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\end{array}\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0}-\frac{y}{2\alpha}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy\,dx}_{=I(y)}=-\frac{y}{2\alpha}I(y).$$

Итак, получили уравнение

$$I'(y)=-\frac{y}{2\alpha}\cdot I(y), \qquad (12)$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим

$$I(y)=C\cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}, \qquad (13)$$

где C — постоянная интегрирования.

Из (11) видим, что

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx. \tag{14}$$

Если в (14) сделать замену $t=\sqrt{\alpha}\cdot x$, то получим

$$I(0)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

В главе 9 (см. §7) было получено $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Следовательно, $I(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Положив теперь в обеих частях равенства (13) $y=0$, получим $C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$I(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}. \tag{15}$$

Глава 14

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Интеграл Эйлера первого рода (Бета-функция)

Так называется интеграл вида

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx. \tag{1}$$

Этот интеграл собственный, если одновременно $a\geq 1$, $b\geq 1$. Если же хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то интеграл (1) — несобственный.

Покажем, что интеграл (1) сходится, если одновременно $a>0$ и $b>0$.

Видим, что подынтегральная функция в (1) имеет, вообще говоря, две особые точки: $x=0$ и $x=1$. Поэтому представляем (1) в виде

$$\mathrm{B}(a,b)=\underbrace{\int_0^{1/2} x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx}_{=I_1}+\underbrace{\int_{1/2}^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx}_{=I_2}=I_1+I_2.$$

Рассмотрим интеграл $I_1=\int_0^{1/2} x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx$. Он — несобственный при $a<1$. Особая точка $x=0$. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$f(x)=x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}=\frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}$$

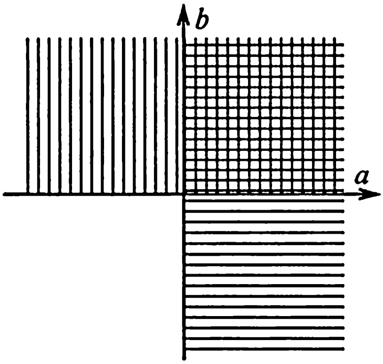


Рис. 14.1. К определению Бета-функции

и введем функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-a}}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{b-1} = 1$ при любом b (конечный, $\neq 0$), то интегралы $\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx = \int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{x^{1-a}}$ сходится лишь тогда, когда $1-a<1$, т. е. когда $a>0$. Следовательно, I_1 сходится при любом b и лишь при $a>0$.

Рассмотрим $I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx$. Он — несобственный при $b<1$. Особая точка $x=1$. Подынтегральная функция

$$f(x) = x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1} = \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}.$$

Положим $\tilde{g}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1-b}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim\limits_{x\to 1} x^{a-1} = 1$ при любом a (конечный, $\neq 0$). Значит, $\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{1/2}^{1}\tilde{g}(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int\limits_{1/2}^{1}\tilde{g}(x)\,dx = \int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{dx}{(1-x)^{1-b}}$ сходится лишь тогда, когда $1-b<1$, т. е. когда $b>0$. Следовательно, I_2 сходится при любом a и лишь при $b>0$.

Вывод: $\mathrm{B}(a,b)$ сходится, если одновременно $a>0$ и $b>0$. Значит, $\begin{cases} 0<a<+\infty, \\ 0<b<+\infty \end{cases}$ — область определения функции $\mathrm{B}(a,b)$ (рис. 14.1).

Установим некоторые *свойства* Бета-функции $\mathrm{B}(a,b)$.

1. Положим в (1) $x=1-t$. Тогда

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=\mathrm{B}(b,a). \tag{2}$$

Видим, что Бета-функция — симметричная функция.

2. Пусть $b>1$. Применяя формулу интегрирования по частям, находим

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^1(1-x)^{b-1}d\left(\frac{x^a}{a}\right)=$$

$$=\underbrace{\left.\frac{x^a}{a}(1-x)^{b-1}\right|_0^1}_{=0}+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{b-2}dx.$$

Так как $x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$, то будем иметь

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{b-1}{a}\underbrace{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx}_{=\mathrm{B}(a,b-1)}-\frac{b-1}{a}\underbrace{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}_{=\mathrm{B}(a,b)}=$$

$$=\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,\,b-1)-\frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1). \tag{3}$$

Так как функция $\mathrm{B}(a,b)$ — симметричная, то при $a>1$ будет справедлива формула

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b). \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) можно применять для “уменьшения” аргументов, чтобы сделать их, например, меньше единицы. Если $b=n$, где n — натуральное, >1, то, применяя формулу (3) повторно, получим

$$\mathrm{B}(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\mathrm{B}(a,n-1)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\mathrm{B}(a,n-2)=\ldots=$$

$$= \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \frac{n-3}{a+n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a+1} \mathrm{B}(a, 1).$$

Но $\mathrm{B}(a, 1) = \int\limits_0^1 x^{a-1} dx = \left. \frac{x^a}{a} \right|_0^1 = \frac{1}{a}$. Поэтому

$$\mathrm{B}(a,n) = \mathrm{B}(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2) \ldots (a+n-2)(a+n-1)}.$$

Если еще и $a = m$, где m — натуральное, то будем иметь

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2) \ldots (m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Получим для функции $\mathrm{B}(a,b)$ другое аналитическое выражение. Для этого в (1) сделаем замену, положив $x = \frac{y}{1+y}$ ($\Rightarrow$ $y = \frac{x}{1-x}$). Тогда $1 - x = \frac{1}{1+y}$, $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$ и, следовательно,

$$\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{(1+y)^{b-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \quad (5)$$

4. Отметим без доказательства, что если $b = 1 - a$ и если еще $0 < a < 1$ (а значит, и $0 < b < 1$), то

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (6)$$

Соотношение (6) будет установлено позже (в теории функций комплексного переменного).

§2. Интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция)

Так называется интеграл вида

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx. \quad (1)$$

Покажем, что интеграл (1) сходится при $a > 0$. Для этого представим его в виде

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx = \underbrace{\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_2}.$$

Рассмотрим $I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Отметим, что I_1 — собственный интеграл, если $a \geq 1$, и несобственный, если $a < 1$ (особая точка $x = 0$). Подынтегральная функция $f(x) = x^{a-1}e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{x^{1-a}}$. Положим $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-a}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$ (конечный, $\neq 0$). Значит, $\int_0^1 f(x)\,dx$ и $\int_0^1 g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится лишь тогда, когда $1 - a < 1$, т. е. когда $a > 0$.

Рассмотрим $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Так как при любом a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{a+1}}{e^x} = 0$, то существует число $k > 1$, такое, что как только $x \geq k$, так сейчас же будет, например, $\dfrac{x^{a+1}}{e^x} < 1$. Но тогда при $x \geq k$ будет $\dfrac{x^{a-1}}{e^x} < \dfrac{1}{x^2}$ при любом a. Известно, что $\int_k^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится. Значит, и $\int_k^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится при любом a. Следовательно, сходится при любом a и несобственный интеграл I_2.

Общий вывод. Интеграл (1) сходится, если $a > 0$, и расходится, если $a \leq 0$. Областью определения функции $\Gamma(a)$ является промежуток $(0, +\infty)$.

Установим некоторые *свойства* функции $\Gamma(a)$.

1. $\Gamma(a) > 0$, $a \in (0, +\infty)$.

Это следует из выражения (1) для $\Gamma(a)$.

2. Рассмотрим произведение $a\,\Gamma(a)$. Имеем

$$a\,\Gamma(a) = a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a\int_0^{+\infty} e^{-x}d\left(\frac{x^a}{a}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$a\,\Gamma(a) = a\left[\underbrace{e^{-x}\cdot\frac{x^a}{a}\Bigg|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx}_{=\Gamma(a+1)}\right],$$

откуда

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a). \tag{2}$$

Равенство (2) выражает так называемое *основное свойство Гамма-функции.* Пользуясь (2), получим при натуральном n и положительном a ($0 < a < 1$)

$$\begin{aligned} \Gamma(n+a) &= (n+a-1)\,\Gamma(n+a-1) = \\ &= (n+a-1)(n+a-2)\,\Gamma(n+a-2) = \ldots = \\ &= (n+a-1)(n+a-2)(n+a-3)\cdot\ldots\cdot a\,\Gamma(a). \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, значение Гамма-функции от аргумента $n+a$, большего единицы, можно выразить через значение Гамма-функции от аргумента a, меньшего единицы. Поэтому таблица значений Гамма-функции обычно дается лишь для значений аргумента между нулем и единицей.

В частности, если в формуле (3) взять $a = 1$ и принять во внимание, что $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то получим

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!.$$

Таким образом, на Гамма-функцию можно смотреть как на обобщение понятия факториала натурального числа: *Гамма-функция является продолжением функции $a!$, определенной только для целых положительных $a = 1, 2, 3, \ldots$, на всю полуось $a > 0$ вещественных чисел.*

3. Покажем, что между Бета-функцией и Гамма-функцией существует следующая связь:

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{4}$$

Для этого рассмотрим $\Gamma(a+b) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a+b-1}e^{-x}dx$. Сделаем в интеграле замену переменной, положив $x = (1+u)z$, где u — произвольное положительное число. Получим $\Gamma(a+b) = = (1+u)^{a+b}\int\limits_0^{+\infty} z^{a+b-1}e^{-(1+u)z}dz$, откуда

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+u)^{a+b}} = \int\limits_0^{+\infty} z^{a+b-1}e^{-(1+u)z}dz.$$

Умножим обе части последнего равенства на u^{a-1} и проинтегрируем по u от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} z^b(uz)^{a-1}e^{-z}e^{-uz}dz\right)du.$$

Но $\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du = \mathrm{B}(a,b)$ (см. §1, формула (5)). Следовательно, предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} z^b(uz)^{a-1}e^{-z}e^{-uz}dz\right)du.$$

В повторном интеграле, стоящем в правой части, переменим порядок интегрирования.

Здесь следует отметить, что мы (при определенных условиях) установили право переставлять два интеграла, из которых лишь один распространен на бесконечный промежуток. Оправдывать такую перестановку в случае, когда оба интеграла берутся по бесконечному промежутку, значительно сложнее. Обоснование возможности перемены порядка интегрирования в нашем повторном интеграле интересующийся может найти в книге Л.Д. Кудрявцева “Курс математического анализа”, т. 2, 1981.

Поменяв порядок интегрирования, получаем

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\left(\int\limits_0^{+\infty}(uz)^{a-1}e^{-uz}z\,du\right)dz.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену $uz = v$:

$$\Gamma(a+b)\cdot \mathrm{B}(a,b) = \int_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\left(\int_0^{+\infty}(v)^{a-1}e^{-v}dv\right)dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\Gamma(a)\,dz = \Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

В частности, $\mathrm{B}(a, 1-a) = \dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)$. Если $0 < a < 1$, то отсюда получаем

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \tag{5}$$

Формула (5) носит название *формулы дополнения.*

Пусть $a = 1/2$. Из формулы (5) находим $\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$ и, следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{6}$$

Пользуясь соотношениями (3) и (6), получаем для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

4. Функция $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

▶ Возьмем любую точку $a_0 > 0$. Всегда можно указать промежуток $[c,d]$ $(0 < c < d < +\infty)$, такой, что $c < a_0 < d$.

Представим $\Gamma(a)$ в виде

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \underbrace{\int_0^{1} x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_1(a)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_2(a)} = I_1(a) + I_2(a).$$

Рассмотрим $I_1(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Имеем:

1) $f(x,a) = x^{a-1}e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ c \le a \le d; \end{cases}$

2) $\int_0^1 f(x,a)\,dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

В самом деле, для $0 < x \le 1$: $x^a \le x^c$ $\Rightarrow$ умножив обе части этого неравенства на $\frac{e^{-x}}{x}$ (>0), получим $x^{a-1}e^{-x} \le x^{c-1}e^{-x}$ (для $0 < x \le 1$ и для $c \le a \le d$). Но интеграл $\int_0^1 x^{c-1}e^{-x}dx$ сходится, если $c > 0$. А тогда по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, интеграл $I_1(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на $[c,d]$. Следовательно, функция $I_1(a)$ непрерывна на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I_1(a)$ непрерывна в точке a_0.

Рассмотрим $I_2(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Имеем:

1) $f(x,a) = x^{a-1}e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 1 \le x < +\infty, \\ c \le a \le d; \end{cases}$

2) $\int_1^{+\infty} f(x,a)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

В самом деле, для $1 \le x < +\infty$: $x^a \le x^d$ $\Rightarrow$ $x^{a-1}e^{-x} \le x^{d-1}e^{-x}$.

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}dx$ сходится для любого конечного d, то $I_2(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на

$[c,d]$. Следовательно, функция $I_2(a)$ непрерывна на $[c,d]$, в частности, $I_2(a)$ непрерывна в точке a_0. Так как $I_1(a)$ и $I_2(a)$ непрерывны в точке a_0, то $\Gamma(a) = I_1(a) + I_2(a)$ непрерывна в точке a_0. У нас a_0 — любая на промежутке $(0, +\infty)$. Значит, $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$. ◀

5. $\Gamma(a) \sim 1/a$ при $a \to +0$.

В самом деле, запишем соотношение (2) в виде

$$\Gamma(a+1) = \frac{\Gamma(a)}{1/a}$$

и перейдем к пределу при $a \to +0$. В силу непрерывности Гамма-функции в интервале $(0, +\infty)$ $\lim\limits_{a \to +0} \Gamma(a+1) = \Gamma(1) = 1$. Значит, и $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{\Gamma(a)}{1/a} = 1$, а это означает, что $\Gamma(a) \sim \dfrac{1}{a}$ при $a \to +0$, т. е. при приближении a к $+0$ $\Gamma(a)$ ведет себя как эквивалентная ей бесконечно большая положительная величина $1/a$.

6. Функция $\Gamma(a)$ имеет в интервале $(0, +\infty)$ производные всех порядков, причем

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx. \tag{7}$$

Установим существование первой производной функции $\Gamma(a)$ и равенство

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx. \tag{8}$$

Возьмем любую точку $a_0 > 0$. Всегда можно указать промежуток $[c,d]$ $(0 < c < d < +\infty)$ такой, что будет $c < a_0 < d$. Имеем:

1) $f(x,a) = x^{a-1}e^{-x}$ и $f'_a(x,a) = x^{a-1}e^{-x} \ln x$ непрерывны в области $\begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ c \le a \le d. \end{cases}$

2) $\int\limits_0^{+\infty} f(x,a)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится в промежутке $[c,d]$.

3) Покажем, что $\int\limits_0^{+\infty} f_a'(x,a)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} f_a'(x,a)\,dx = \int\limits_0^{1} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx .$$

Рассмотрим $\int\limits_0^{1} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$.

Так как $0 < x \le 1$, $c \le a \le d$, то $x^{a-1}e^{-x} \le x^{c-1}e^{-x}$ (см. пункт 4) $\Rightarrow$ $\underbrace{x^{a-1}e^{-x}\ln x}_{\le 0} \ge \underbrace{x^{c-1}e^{-x}\ln x}_{\le 0}$, ибо $\ln x \le 0$ для $x \in (0,1]$. А тогда

$$\left|x^{a-1}e^{-x}\ln x\right| \le \left|x^{c-1}e^{-x}\ln x\right| = \underbrace{-x^{c-1}e^{-x}\ln x}_{\ge 0} .$$

Так как $e^{-x} < 1$ для $x \in (0,1]$, то $\left|x^{a-1}e^{-x}\ln x\right| \le -x^{c-1}\ln x$. Имеем

$$-\int\limits_0^{1} x^{c-1}\ln x\,dx = \left[\begin{array}{lll} u = \ln x & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^{c-1}dx & \Rightarrow & v = \dfrac{1}{c}x^c \end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{c}x^c \ln x\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} + \frac{1}{c}\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}} .$$

Мы знаем, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}}$ сходится, если $1-c<1$, т. е. если $c>0$. Следовательно, по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

Рассмотрим теперь $\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$.

Для $1 \le x < +\infty$, $c \le a \le d$ имеем: $x^{a-1}e^{-x} \le x^{d-1}e^{-x} \Rightarrow x^{a-1}e^{-x}\ln x \le x^{d-1}e^{-x}\ln x$, ибо $\ln x \ge 0$ для $x \in [1,+\infty)$. Имеем: $x^{d-1}e^{-x}\ln x = x^d e^{-x}\dfrac{\ln x}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$, то существует точка $\tilde{x}$ (>1) такая, что для $x \ge \tilde{x}$: $\dfrac{\ln x}{x} < 1$ и, следовательно, для $x \ge \tilde{x}$: $x^{d-1}e^{-x}\ln x < x^d e^{-x}$. Так как $\int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty} x^d e^{-x}dx$ сходится при любом конечном d, то сходится интеграл $\int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}\ln x\,dx$, а значит, сходится $\int\limits_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}\ln x\,dx$. А тогда по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$. Таким образом, окончательно приходим к выводу, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

Значит, $\Gamma'(a)$ существует для любого $a \in [c,d]$, в частности, существует $\Gamma'(a_0)$. Так как точка a_0 — любая ($a_0 > 0$), то заключаем: $\Gamma'(a)$ существует для $a \in (0,+\infty)$, причем $\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$. Формула (8) доказана.

Доказательство равенства (7) проводится с помощью аналогичных оценок по индукции.

Теперь мы в состоянии составить себе представление о характере поведения Гамма-функции в интервале $(0;+\infty)$.

Имеем $\Gamma''(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^2\,dx$.

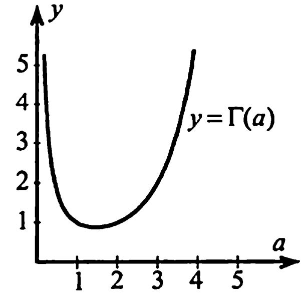


Рис. 14.2. График функции $y = \Gamma(a)$ при $a > 0$

Ясно, что $\Gamma''(a) > 0$, и поэтому $\Gamma'(a)$ строго возрастает в $(0;+\infty)$. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля в интервале $(1,2)$ лежит точка c, такая, что $\Gamma'(c) = 0$. Следовательно, $\Gamma'(a) < 0$ при $0 < a < c$ и $\Gamma'(a) > 0$ при $c < a < +\infty$. Значит, сама функция $\Gamma(a)$ строго убывает в интервале $(0, c)$ и строго возрастает в интервале $(c, +\infty)$. При этом $\lim\limits_{a\to+0} \Gamma(a) = +\infty$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} \Gamma(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma(n) = +\infty$. В точке $a = c$ функция $\Gamma(a)$ достигает своего наименьшего значения. Можно показать, что $c \approx 1.462$; $\Gamma(c) \approx 0.886$. График Гамма-функции представлен на рис. 14.2.

Замечание 1. Пользуясь основным свойством (2) Гамма-функции и опираясь на определение (1) этой функции при положительных значениях аргумента a, можно определить Гамма-функцию и для отрицательных значений аргумента. В самом деле, запишем формулу (2) в виде

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \tag{9}$$

Из (9) видим, что, зная значение Гамма-функции при каком-нибудь значении аргумента, можно вычислить ее значение при аргументе, уменьшенном на единицу. Для этого нужно прежнее значение функции разделить на уменьшенное значение аргумента.

Если взять a, удовлетворяющее неравенствам $-1 < a < 0$, то в правой части (9) $\Gamma(a+1)$ будет функцией от положительного аргумента, значение которой определено формулой (1), а в левой части (9) $\Gamma(a)$ будет функцией от отрицательного аргумента. За значение $\Gamma(a)$ при a из промежутка $(-1, 0)$ принимаем значение $\dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$ в соответствии с формулой (9). Так, например,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}\,.$$

Если теперь взять a, удовлетворяющее неравенствам $-2 < a < -1$, то правая часть формулы (9) будет содержать значения Гамма-функции при аргументах из промежутка $(-1, 0)$, уже определенные нами выше. Это дает возможность по формуле (9) определить значения $\Gamma(a)$ при $-2 < a < -1$. В силу этого определения будем иметь, например:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,.$$

Определив теперь значения Гамма-функции в промежутке $(-2, -1)$, мы, пользуясь формулой (9), сможем определить ее значения в промежутке $(-3, -2)$, и т. д. Так мы можем определить значения Гамма-функции при любых отрицательных *не целых* значениях аргумента a.

Выше было отмечено, что $\Gamma(+0)=\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a)=+\infty$. Из формулы (9) находим, что

$$\Gamma(-0)=\lim_{a\to-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=-\infty\,.$$

Пользуясь этой же формулой (9), находим, что

$$\Gamma(-1+0)=\lim_{a\to-1+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(+0)}{-1}=-\infty\,,$$

$$\Gamma(-1-0)=\lim_{a\to-1-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-0)}{-1}=+\infty\,,$$

$$\Gamma(-2+0)=\lim_{a\to-2+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-1+0)}{-2}=+\infty\,,$$

$$\Gamma(-2-0)=\lim_{a\to-2-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-1-0)}{-2}=-\infty$$

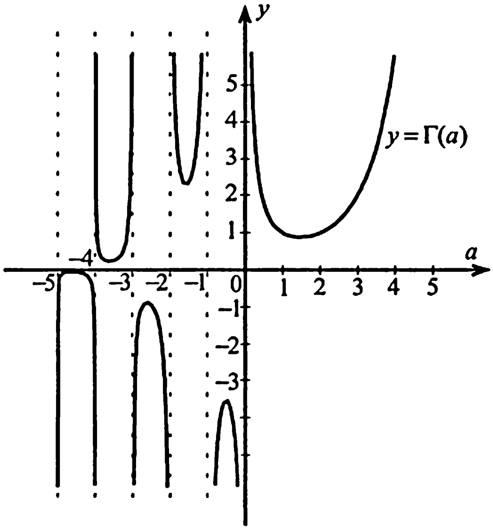


Рис. 14.3. График функции $y = \Gamma(a)$

и т. д. Обычно это выражают словами так: Гамма-функция при нуле и при целых отрицательных значениях аргумента обращается в бесконечность (см. рис. 14.3).

Замечание 2. Введенная в этом параграфе неэлементарная функция $\Gamma(a)$ играет в математике важную роль. Для функции $\Gamma(a)$ составлены подробные таблицы, и при вычислениях она может использоваться наравне с простейшими элементарными функциями — показательной, тригонометрическими и т. д.

Оказывается, что определенные интегралы различных типов могут быть выражены через Гамма-функцию. В частности, к таким интегралам нередко приводят задачи, связанные с вычислением площадей и объемов. Даже если функция имеет первообразную, являющуюся элементарной функцией, интеграл от этой функции зачастую целесообразно вычислять, используя Гамма-функцию.

§3. Примеры

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x^c)^{b-1}dx$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

▶ Положим $x^c = t \Rightarrow cx^{c-1}dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{1}{c}t^{\frac{1-c}{c}}dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{c}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{c}}t^{\frac{1-c}{c}}(1-t)^{b-1}dt=\frac{1}{c}\int_0^1 t^{\frac{a}{c}-1}(1-t)^{b-1}dt=$$

$$=\frac{1}{c}\mathrm{B}\left(\frac{a}{c},b\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{a}{c}+b\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь a, b, c — любые вещественные положительные числа, а значит, вообще говоря, неопределенный интеграл $\int x^{a-1}(1-x^c)^{b-1}dx$ является неэлементарной функцией. Известно, что даже в случае, когда a, b, c — рациональные числа, этот неопределенный интеграл является элементарной функцией лишь тогда, когда по крайней мере одно из чисел b, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c}+b$ — целое. ◀

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{a-1}x\cdot\cos^{b-1}x\,dx$ $(a>0,\ b>0)$.

▶ Запишем этот интеграл в виде

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^{a-2}x\cdot\cos^{b-2}x\cdot 2\sin x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x\right)^{\frac{a-2}{2}}\cdot\left(\cos^2 x\right)^{\frac{b-2}{2}}\cdot 2\sin x\cos x\,dx.$$

Положим $\sin^2 x=t \Rightarrow 2\sin x\cos x\,dx=dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a}{2}-1}\cdot(1-t)^{\frac{b}{2}-1}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

В частности, при $b=1$ будем иметь

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что и в этом примере a, b — любые вещественные положительные числа, а значит, неопределенный интеграл $\int \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x\, dx$ является, вообще говоря, неэлементарной функцией. ◀

Пример 3. Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^\pi}$.

▶ Положим $x^\pi = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{\pi}}$ и $dx = \dfrac{1}{\pi} t^{\frac{1}{\pi}-1} dt$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{1/\pi - 1}}{1 + t} dt.$$

Мы знаем, что $\mathrm{B}(a, b) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^{a-1}}{(1 + t)^{a+b}} dt$. Значит, в нашем примере

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} - 1 = a - 1, \\ 1 = a + b, \end{cases}$$

откуда $a = \dfrac{1}{\pi}$ и $b = 1 - \dfrac{1}{\pi}$. Имеем, таким образом,

$$I = \frac{1}{\pi} \mathrm{B}\left(\frac{1}{\pi},\ 1 - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \dfrac{1}{\pi}\right)} = \frac{1}{\sin 1}$$

(так как $\mathrm{B}(a, 1 - a) = \dfrac{\pi}{\sin \pi a}$, если $0 < a < 1$). ◀

Пример 4. Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x \ln x}{1 + x^3} dx$.

▶ Положим $x^3 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}}$, $dx = \dfrac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$ и $\ln x = \dfrac{1}{3} \ln t$. Тогда

$$I = \frac{1}{9} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}} \ln t}{1 + t} dt.$$

Введем в рассмотрение $\mathrm{B}(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ $(0 < a < 1)$. Имеем $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по a. Получим $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1} \cdot \ln t}{1+t} dt = -\pi^2 \cdot \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$, откуда при $a = \frac{2}{3}$ находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}} \cdot \ln t}{1+t} dt = -\pi^2 \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{3}\pi^2 .$$

Тогда $I = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{2}{27}\pi^2$. ◀

Глава 15

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§1. Тригонометрические ряды

Определение. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на промежутке $[a, b]$, называются *взаимно ортогональными* на этом промежутке, если

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0. \qquad (1)$$

Лемма 1. Если n — целое число, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0. \qquad (2)$$

▶ Если $n = 0$, то (2) очевидно.

Если $n \neq 0$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$. ◀

Лемма 2. Если $n \neq 0$ — целое число, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0. \qquad (3)$$

▶ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$. ◀

Теорема 1. Любые две функции системы:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \qquad (T)$$

взаимно ортогональны на промежутке $[-\pi, \pi]$.

▶ 1) Ортогональность 1 и $\sin kx$ $(k = 1, 2, \dots)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ доказана в лемме 1.

2) Ортогональность 1 и $\cos kx$ $(k = 1, 2, \dots)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ доказана в лемме 2.

3) Ортогональность $\cos px$ и $\cos qx$ $(p = 1, 2, \dots\ ;\ q = 1, 2, \dots\ ;\ p \neq q)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ следует из того, что

$$\cos px \cdot \cos qx = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x + \cos(p+q)x\right],$$

и из леммы 2.

4) Ортогональность $\sin px$ и $\sin qx$ $(p = 1, 2, \dots\ ;\ q = 1, 2, \dots\ ;\ p \neq q)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ вытекает из того, что

$$\sin px \cdot \sin qx = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\right],$$

и из леммы 2.

5) Ортогональность $\sin px$ и $\cos qx$ $(p = 1, 2, \dots\ ;\ q = 1, 2, \dots)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ следует из того, что

$$\sin px \cdot \cos qx = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\right],$$

и из леммы 1. ◀

Теорема 2. Если $n = 1, 2, \dots$, то справедливы формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi. \tag{4}$$

▶ 1) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx}_{=0\ (\text{по лемме 2})} = \pi.$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx}_{=0\ (\text{по лемме 2})} = \pi.$$ ◀

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ — периодическая с периодом $T = 2\pi$, т. е. $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $\varphi(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке. Тогда для любого конечного a

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx, \tag{5}$$

т. е. интеграл от периодической функции, взятый по промежутку, длина которого равна периоду этой функции, имеет одно и то же значение независимо от положения промежутка на вещественной оси.

▶ Имеем

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{0} \varphi(x)\,dx}_{=J_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx}_{=J_2} + \underbrace{\int_{2\pi}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx}_{=J_3}.$$

В интеграле J_3 сделаем замену, положив $x = u + 2\pi$. Получим

$$J_3 = \int_0^a \underbrace{\varphi(u+2\pi)}_{=\varphi(u)}\,du = \int_0^a \varphi(u)\,du,$$

т. е. $J_3 = -J_1$. А тогда $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx = J_2 = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx$. ◀

Следствие. В теоремах 1 и 2 промежуток $[-\pi, \pi]$ можно заменить промежутком $[a, a+2\pi]$, где a — любое конечное число.

Определение. Бесконечный ряд вида

$$A + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + \\ + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots \tag{6}$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Теорема 4. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[-\pi, \pi]$ и разлагается в этом промежутке в тригонометрический ряд, сходящийся в $[-\pi, \pi]$ равномерно, то коэффициенты A, a_1, b_1, a_2, b_2, ... этого ряда определяются однозначно.

▶ По условию для всех $x \in [-\pi, \pi]$ имеем

$$f(x) = A + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + \\ + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots, \tag{7}$$

причем ряд, стоящий в правой части (7), сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$. Проинтегрируем обе части (7) по x от $-\pi$ до π (так как члены ряда (7) непрерывны и ряд (7) сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$, то его можно почленно интегрировать). Получим, приняв во внимание леммы 1 и 2:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} A\,dx + 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = A \cdot 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Умножим обе части (7) на $\cos nx$ (это не нарушает равномерной сходимости ряда (7) в промежутке $[-\pi, \pi]$, ибо $\cos nx$ — функция ограниченная) и проинтегрируем полученное равенство по x от $-\pi$ до π. В силу ортогональности системы (T) на промежутке $[-\pi, \pi]$, в правой части исчезнут все члены, кроме одного. Будем иметь, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos^2 nx\,dx = a_n \cdot \pi \;\Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Аналогично, умножив обе части (7) на $\sin nx$ и интегрируя по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{10}$$

Итак, если функция $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то коэффициенты A, a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ определяются однозначно соответственно по формулам (8), (9), (10).

Определение. Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Числа

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

($n = 1, 2, \dots$) называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (6) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Из доказательства теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то этот ряд обязательно есть ее ряд Фурье.

Замечание. Составить ряд Фурье можно для любой функции $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Однако это вовсе не означает, что всякая такая функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$, ибо составленный ряд может расходиться и может сходиться, но не к $f(x)$.

Если ряд $A + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ есть ряд Фурье для функции $f(x)$, то пишут

$$f(x) \sim A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

§2. Интеграл Дирихле

Лемма. Справедливо тождество

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

▶ Положим $S = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$, откуда, умножив обе части на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, находим

$$S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \dots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha.$$

Но $2\sin A\cos B = \sin(B + A) - \sin(B - A)$. Поэтому

$$S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha\right) + \dots +$$

$$+\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right) \Rightarrow S\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{2n+1}{2}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } \alpha\neq 2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\dots\ ), \text{ то } S=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, тождество (1) установлено для $\alpha\neq 2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$. Оно верно и для $\alpha=2k\pi$, если понимать его в этом случае в предельном смысле. В самом деле, имеем:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 2k\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\dots+\cos n\alpha\right)=\frac{1}{2}+n=\frac{2n+1}{2}$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 2k\pi}\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\left[\begin{array}{l}\text{замена: } \alpha=2k\pi+\beta,\\ \beta\to0, \text{ если } \alpha\to2k\pi\end{array}\right]=$

$$=\lim_{\beta\to0}\frac{(-1)^{k(2n+1)}\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\cdot(-1)^k\sin\frac{\beta}{2}}=\lim_{\beta\to0}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\lim_{\beta\to0}\frac{\frac{2n+1}{2}\beta}{2\cdot\frac{\beta}{2}}=\frac{2n+1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пусть $f(x)\in R([-\pi,\pi])$. Составим для этой функции ее ряд Фурье и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ этого ряда при закрепленном x. Имеем $S_n(x)=A+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$. Подставим здесь вместо A, a_k, b_k их выражения:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt;\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

Получим

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

По лемме, $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$. Поэтому

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \qquad (2)$$

(2) — *сингулярный интеграл Дирихле.*

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы в промежутке $(-\infty;+\infty)$, интегрируемы в каждом конечном промежутке и имеют период 2π.

Возьмем функцию $f(x)\in R_{2\pi}$ и преобразуем интеграл Дирихле такой функции (т. е. преобразуем частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье такой функции). Имеем

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Положим $t=x+u$ (x закреплено, u — новая переменная). Тогда

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

В этом интеграле промежуток интегрирования имеет длину 2π ($\pi-x-(-\pi-x)=2\pi$); подынтегральная функция — периодическая с периодом 2π (это легко проверить). По теореме 3 предыдущего параграфа промежуток интегрирования $[-\pi-x,\pi-x]$ можно заменить любым промежутком, длина которого равна 2π. Так что будем иметь, например,

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du. \qquad (3)$$

В интеграле (3) сделаем замену $u = 2t_1$. Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x + 2t_1) \frac{\sin(2n+1)t_1}{\sin t_1} dt_1 . \tag{4}$$

Разобьем интеграл (4) на два интеграла по схеме

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underbrace{\int\limits_{0}^{\pi/2}}_{=J_1} + \underbrace{\int\limits_{-\pi/2}^{0}}_{=J_2} .$$

В интеграле J_2 сделаем замену, положив $t_1 = -t_2$. Получим

$$J_2 = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(x - 2t_2) \frac{\sin(2n+1)t_2}{\sin t_2} dt_2 .$$

Мы знаем, что переменную интегрирования можно обозначать любой буквой. Поэтому можно написать, например,

$$J_1 = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(x + 2\tilde{t}) \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}} d\tilde{t}; \qquad J_2 = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(x - 2\tilde{t}) \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}} d\tilde{t},$$

и, следовательно, для $S_n(x)$ будем иметь окончательно

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[f(x + 2\tilde{t}) + f(x - 2\tilde{t}) \right] \cdot \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}} d\tilde{t} . \tag{5}$$

Итак, если функция $f(x) \in R_{2\pi}$, то частичная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье этой функции выражается формулой (5).

Частный случай. Пусть $f(x) \equiv 1$. Ясно, что $f(x) \in R_{2\pi}$, а потому частичная сумма $S_n(x)$ ее ряда Фурье, в силу (5), будет выражаться так:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} 2 \cdot \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}} d\tilde{t} .$$

Но с другой стороны: $S_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, где для нашей функции $f(x) \equiv 1$ будем иметь

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt = 1;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kt\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kt\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Значит, $S_n(x) = 1$. Таким образом, получаем

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t}. \tag{6}$$

§3. Теорема Римана — Лебега

Теорема. Пусть функция $\psi(t) \in R([a, b])$. Тогда

$$\lim_{z\to+\infty}\int_{a}^{b} \psi(t)\sin zt\,dt = 0. \tag{1}$$

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое и разобьем промежуток $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ на столь малые части, чтобы оказалось: $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(t_{k+1} - t_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Здесь ω_k — колебание функции $\psi(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$. (Так сделать можно, ибо это — необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $\psi(t)$ на промежутке $[a, b]$.) Выбранный способ дробления промежутка $[a, b]$ закрепим и менять не будем. Тогда, в частности, закрепится и n. Наш интеграл $J(z) = \int_{a}^{b}\psi(t)\sin zt\,dt$ запишется так:

$$J(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\psi(t)\sin zt\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\psi(t)-\psi(t_k)]\sin zt\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}\psi(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt.$$

Если $t\in[t_k,t_{k+1}]$, то $|\psi(t)-\psi(t_k)|\le\omega_k$. Следовательно,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\psi(t)-\psi(t_k)]\sin zt\,dt\right|\le\int_{t_k}^{t_{k+1}}\underbrace{|\psi(t)-\psi(t_k)|}_{\le\omega_k}\cdot\underbrace{|\sin zt|}_{\le 1}dt\le\omega_k(t_{k+1}-t_k).$$

Но тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\psi(t)-\psi(t_k)]\sin zt\,dt\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(t_{k+1}-t_k)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $|J(z)|<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}|\psi(t_k)|\cdot\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin ztdt\right|$. Функция $\psi(t)$ — ограниченная в $[a,b]$, ибо $\psi(t)\in R([a,b])$. Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]}|\psi(t)|$. Тогда $|\psi(t_k)|\le M$. Кроме того,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt\right|=\left|\frac{\cos zt_k-\cos zt_{k+1}}{z}\right|\le\frac{2}{z}.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\psi(t_k)|\cdot\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt\right|\le\frac{2M}{z}\cdot n$$

(n — число слагаемых). Следовательно, $|J(z)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{z}\cdot n$. Пусть z_0 столь велико, что при $z>z_0$ оказывается: $\frac{2M}{z}\cdot n<\frac{\varepsilon}{2}$ (M и n — определенные числа). Но тогда при $z>z_0$ будет $|J(z)|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{z\to+\infty}J(z)=0$. ◀

Замечание 1. Теорема Римана — Лебега допускает обобщение, а именно.

Пусть функция $\psi(t)$ определена в $(a, b]$, интегрируема в каждом промежутке $[\alpha, b]$, где $a < \alpha \le b$; интеграл $\int_a^b |\psi(t)|dt$ существует уже как несобственный. Тогда $\lim\limits_{z \to +\infty} \int_a^b \psi(t) \sin zt\, dt = 0$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. По условию, $\int_a^b |\psi(t)|dt$ сходится. Это означает, что $\lim\limits_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b |\psi(t)|dt = \int_a^b |\psi(t)|dt$, или что

$$\int_a^b |\psi(t)|dt - \int_\alpha^b |\psi(t)|dt \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to a+0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^\alpha |\psi(t)|dt \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to a+0.$$

Последнее означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число α_0 ($a < \alpha_0 < b$), такое, что при всяком α, удовлетворяющем условию: $a < \alpha < \alpha_0$, будет: $\int_a^\alpha |\psi(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем и закрепим какое-нибудь α, удовлетворяющее условию: $a < \alpha < \alpha_0$. Имеем

$$J(z) = \int_a^b \psi(t) \sin zt\, dt = \int_a^\alpha \psi(t) \sin zt\, dt + \int_\alpha^b \psi(t) \sin zt\, dt.$$

При всех z справедлива оценка:

$$\left| \int_a^\alpha \psi(t) \sin zt\, dt \right| \le \int_a^\alpha |\psi(t)| \cdot |\sin zt| dt \le \int_a^\alpha |\psi(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, функция $\psi(t)$ интегрируема на промежутке $[\alpha, b]$ в обычном смысле. Поэтому, по теореме Римана — Лебега: $\lim\limits_{z \to +\infty} \int_\alpha^b \psi(t) \sin zt\, dt = 0$. А это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $z_0 > 0$, такое, что для всех $z > z_0$ будет

$$\left|\int_{\alpha}^{b} \psi(t) \sin zt\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

И, следовательно, для всех $z > z_0$ будем иметь $|J(z)| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim\limits_{z\to+\infty} J(z) = 0$.

Замечание 2. При тех же условиях относительно функции $\psi(t)$ аналогичным образом устанавливается, что

$$\lim_{z\to+\infty} \int_{a}^{b} \psi(t) \cos zt\, dt = 0. \qquad (2)$$

Замечание 3. Пусть $f(t) \in R([-\pi, \pi])$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. коэффициенты Фурье любой интегрируемой на промежутке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при неограниченном увеличении номера n.

Следствие из теоремы Римана—Лебега (принцип локализации). Пусть функция $f(x) \in R_{2\pi}$. Мы знаем, что при любом закрепленном x

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \left[f(x + 2\tilde{t}) + f(x - 2\tilde{t})\right] \cdot \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}}\, d\tilde{t}. \qquad (3)$$

Пусть $0 < a < \pi$ (здесь $a = \mathrm{const}$; a можно взять сколь угодно малым). Представим правую часть (3) в виде суммы двух интегралов:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a/2} \left[f(x + 2\tilde{t}) + f(x - 2\tilde{t})\right] \cdot \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}}\, d\tilde{t} + \alpha_n(x), \quad (4)$$

где

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a/2}^{\pi/2} \left[f(x + 2\tilde{t}) + f(x - 2\tilde{t})\right] \cdot \frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin \tilde{t}}\, d\tilde{t}.$$

В промежутке $\left[\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ непрерывна и не обращается в нуль. Значит, функция $\dfrac{f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})}{\sin\tilde{t}} \in R\left(\left[\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Но тогда по теореме Римана — Лебега $\alpha_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Так как число a можно взять любым сколь угодно малым, положительным, то из (4) следует так называемый **принцип локализации.**

Поведение ряда Фурье любой функции $f(x) \in R_{2\pi}$ в закрепленной точке x зависит только от значений, принимаемых функцией f в любой сколь угодно малой окрестности точки x.

Иначе: если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, принадлежащие $R_{2\pi}$ и совпадающие в промежутке $[x-a, x+a]$ $(0 < a < \pi)$, то в самой точке x ряды Фурье этих функций ведут себя одинаково, т. е. они или оба расходятся, или оба сходятся, и притом к одной и той же сумме.

▶ Пусть $S_n(f,x)$ и $S_n(g,x)$ — частичные суммы рядов Фурье (соответственно функций f и g) при закрепленном x. Тогда

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}d\tilde{t} + \alpha_n(x),$$

$$S_n(g,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[g(x+2\tilde{t})+g(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}d\tilde{t} + \beta_n(x).$$

Если $\tilde{t} \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$, то точки $x-2\tilde{t}$ и $x+2\tilde{t}$ попадают в промежуток $[x-a, x+a]$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}d\tilde{t} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[g(x+2\tilde{t})+g(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}d\tilde{t}.$$

А тогда $S_n(f,x) - S_n(g,x) = \alpha_n(x) - \beta_n(x)$. Но $\alpha_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$; $\beta_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, $S_n(f,x) - S_n(g,x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. ◀

§4. Проблема разложения функции в ряд Фурье

1°. Пусть функция $f(x) \in R_{2\pi}$. Составим ряд Фурье функции $f(x)$ и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ этого ряда при закрепленном x. Мы знаем, что

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t)\right] \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt, \tag{1}$$

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} 2 \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \tag{2}$$

Пусть A — некоторое постоянное число. Умножим обе части (2) на число A и вычтем из (1) соответствующие части получившегося равенства. Получим

$$S_n(x) - A = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \left[f(x+2t) + f(x-2t) - 2A\right] \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \tag{3}$$

Из (3) видно: для того чтобы ряд Фурье функции f в точке x сходился и имел своей суммой число A, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2A}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt = 0. \tag{4}$$

Из обобщенной теоремы Римана — Лебега следует, что соотношение (4) заведомо выполняется, если только существует интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|f(x+2t) + f(x-2t) - 2A|}{\sin t}\,dt. \tag{5}$$

Так как $\sin t \sim t$ при $t \to 0$, то интеграл (5) существует, если существует интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|f(x+2t) + f(x-2t) - 2A|}{t}\,dt, \quad \text{или}$$

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2A|}{t}\,dt \tag{6}$$

(здесь заменили $2t$ на t).

Таким образом, доказана теорема (признак Дини).

Признак Дини. Пусть функция $f(x) \in R_{2\pi}$. Если в некоторой точке x оказывается, что существует интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt$, где A — некоторое постоянное число, то в этой точке x ряд Фурье функции f сходится и имеет своей суммой число A.

Замечание 1. В признаке Дини вместо существования интеграла $\int\limits_0^{\pi}$ можно говорить о существовании интеграла $\int\limits_0^{a}$, где $a > 0$, ибо интегралы $\int\limits_0^{\pi}$ и $\int\limits_0^{a}$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 2. Интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt$ не может существовать при двух различных значениях A.

▶ Предположим противное, а именно, допустим, что наш интеграл сходится при $A = A_1$ и при $A = A_2$, где $A_1 \neq A_2$. Имеем

$$\frac{A_1 - A_2}{t} = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A_2}{2t} - \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A_1}{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|A_1 - A_2|}{t} \leq \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A_2|}{2t} + \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A_1|}{2t}.$$

Если наше предположение верно, то получаем, что должен сходиться интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{|A_1 - A_2|}{t}dt$, а это не так. ◀

Следствия признака Дини.

I. Пусть:

1) $f(x) \in R_{2\pi}$;

2) $f(x)$ имеет в некоторой точке x конечную производную $f'(x)$.

Тогда ряд Фурье функции f в этой точке x сходится и имеет своей суммой $f(x)$ (т. е. в этой точке x наша функция f разлагается в ряд Фурье).

▶ Утверждение пункта I будет доказано, если показать, что существует (т. е. сходится) интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt. \tag{7}$$

Видим, что точка $t=0$ есть единственная особая точка для несобственного интеграла (7). (В этой точке подынтегральная функция не определена.) Имеем

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right) = f'(x)-f'(x)=0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подынтегральная функция в (7) является ограниченной в правой полуокрестности точки $t=0$. Значит, несобственный интеграл (7) сходится. ◀

II. Пусть:

1) $f(x)\in R_{2\pi}$;

2) в некоторой точке x существуют конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Тогда ряд Фурье этой функции в упомянутой точке x сходится и имеет своей суммой $f(x)$. (Значит, и в такой точке x наша функция f разлагается в ряд Фурье.)

▶ Как и в случае I, достаточно убедиться в ограниченности функции $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$ в правой полуокрестности точки $t=0$. А это следует из того, что

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right) =$$

$$= f'_+(x) - f'_-(x)$$

есть конечное число. ◀

III. Пусть:

1) $f(x)\in R_{2\pi}$;

2) в некоторой точке x существуют следующие четыре конечных предела:

а) $f(x+0)$, б) $f(x-0)$,

в) $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=\alpha$, г) $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}=\beta$.

Тогда ряд Фурье этой функции в упомянутой точке x сходится и имеет своей суммой $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

▶ Как и выше, достаточно убедиться в ограниченности функции $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t}$ в правой полуокрестности точки $t=0$. А это следует из того, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t}=$$

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}-\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}\right)=\alpha-\beta$$

— конечное число. ◀

2°. Случай, когда функция не является периодической.

В пункте 1° мы предполагали, что функция $f(x)$ — периодическая с периодом 2π. Откажемся теперь от этого предположения.

Основная теорема. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[-\pi, \pi]$ и в каждой точке этого промежутка имеет конечную производную $f'(x)$ (здесь уже $f(x)\notin R_{2\pi}$). Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в промежутке $[-\pi, \pi]$, и его сумма $S(x)$ такова:

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in(-\pi,\pi);\\[2mm] \dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}, & \text{если } x=\pm\pi.\end{cases}$$

(Теорема устанавливает разложимость функции $f(x)$ в ряд Фурье в промежутке $(-\pi,\pi)$, а также сходимость этого ряда в точках $x=-\pi$, $x=\pi$.)

▶ Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(x)$, определив ее на всей вещественной оси следующим образом:

$$g(x)=f(x),\ \text{если}\ x\in[-\pi,\pi);$$

$$g(x+2\pi)\equiv g(x).$$

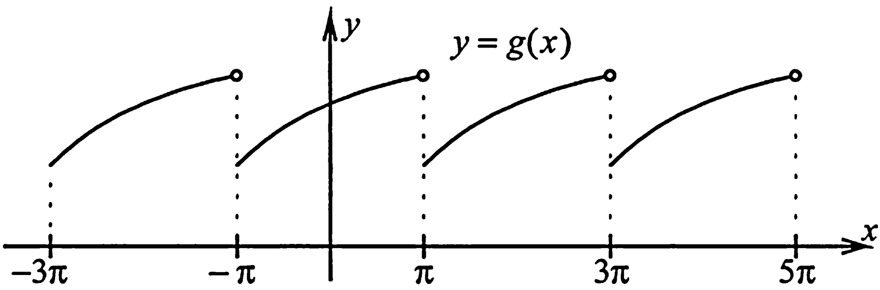


График функции $y = g(x)$

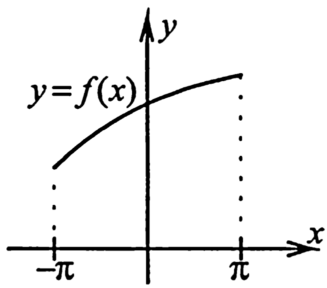


График функции $y = f(x)$

Рис. 15.1

Заметим, что функция $g(x) \in R_{2\pi}$. Поэтому к ней применима вся предыдущая теория.

Отметим также, что ряд Фурье для функции $g(x)$ совпадает с рядом Фурье для функции $f(x)$, ибо совпадают соответствующие коэффициенты этих рядов. В самом деле, имеем, например,

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt; \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

У нас $g(t) = f(t)$ в $[-\pi, \pi)$. Отсюда заключаем, что $a_n(g) = a_n(f)$, ибо изменение значения подынтегральной функции в одной точке не изменяет величину интеграла.

а) Возьмем любую точку $x \in (-\pi, \pi)$ и закрепим ее. Ясно, что $g(x) = f(x)$. Всегда можно указать окрестность точки x: $u_\delta(x)$ такую, что $u_\delta(x) \subset (-\pi, \pi)$. Взятому x дадим приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x + \Delta x \in u_\delta(x)$. Имеем

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Отсюда заключаем, что существует конечная производная $g'(x)$, причем $g'(x)=f'(x)$. А тогда, по следствию I признака Дини, ряд Фурье функции $g(x)$ (а значит, и функции $f(x)$) сходится в точке x и имеет своей суммой $g(x)$ (а значит, $f(x)$).

б) Пусть теперь $x=\pi$. Покажем, что в этой точке выполняются условия следствия III признака Дини. Действительно, имеем:

1) $g(\pi-0)=\lim\limits_{t\to\pi-0}g(t)=\lim\limits_{t\to\pi-0}f(t)=f(\pi)$ существует, конечный;

2) $g(\pi+0)=\lim\limits_{t\to\pi+0}g(t)=\lim\limits_{t\to+0}g(\pi+t)=\lim\limits_{t\to+0}g(-\pi+t)=\lim\limits_{t\to+0}f(-\pi+t)=$ $=f(-\pi)$ существует, конечный;

3) $\lim\limits_{t\to+0}\frac{g(\pi+t)-g(\pi+0)}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{g(-\pi+t)-f(-\pi)}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(-\pi+t)-f(-\pi)}{t}=$ $=f'_+(-\pi)$ существует, конечный;

4) $\lim\limits_{t\to+0}\frac{g(\pi-t)-g(\pi-0)}{-t}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(\pi-t)-f(\pi)}{-t}=f'_-(\pi)$ существует, конечный.

А тогда ряд Фурье функции $g(x)$ (а значит, и функции $f(x)$) в рассматриваемой точке $x=\pi$ сходится и имеет своей суммой $\frac{g(\pi-0)+g(\pi+0)}{2}=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$.

Совершенно аналогично устанавливается сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ к сумме $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ в точке $x=-\pi$. ◀

Замечание 1. Если, в частности, $f(-\pi)=f(\pi)$, то функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье в замкнутом промежутке $[-\pi,\pi]$.

Замечание 2. Так как члены ряда Фурье есть функции периодические с периодом 2π, то и его сумма $S(x)$ является периодической с периодом 2π, т. е. $S(x+2\pi)=S(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

Замечание 3. Основная теорема допускает следующее обобщение (оно доказывается аналогичными рассуждениями).

Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Тогда:

1) в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$, в которой существуют четыре конечных предела:

а) $f(x-0)$, б) $f(x+0)$,

в) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$, г) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}$,

ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой: $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

2) ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x=-\pi$, $x=\pi$ к сумме $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, если существуют четыре конечных предела:

а) $f(-\pi+0)$, б) $f(\pi-0)$,

в) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(-\pi+t)-f(-\pi+0)}{t}$, г) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\pi-t)-f(\pi-0)}{-t}$.

Заметим, что если точка $x \in (-\pi, \pi)$ является точкой непрерывности функции $f(x)$, то в этой точке $f(x-0)=f(x)$, $f(x+0)=f(x)$ и, следовательно,

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=f(x).$$

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [-\pi, 0); \\ 2, & \text{если} \quad x=0; \\ 1, & \text{если} \quad x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Видим, что $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Найдем коэффициенты Фурье этой функции.

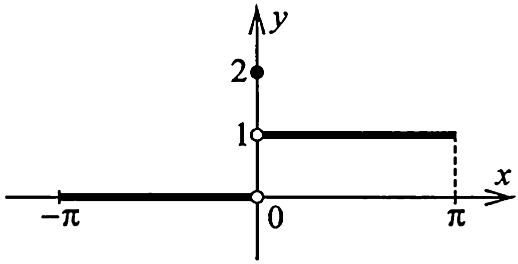


Рис. 15.2. График функции $y = f(x)$

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot dx\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx\right) = 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \quad\Rightarrow\quad b_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{четное;} \\ \dfrac{2}{n\pi}, \text{ если } n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Получаем, следовательно:

1) Для $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right);$$

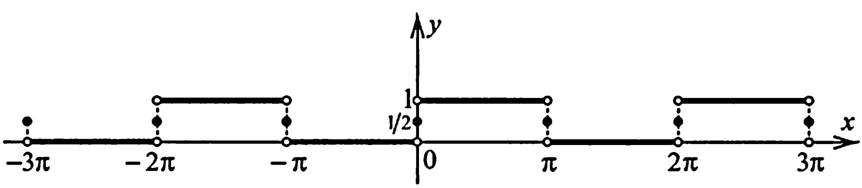


Рис. 15.3. График функции $y = S(x)$

2) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точке $x=0$

$$S(0)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точках $x=-\pi$; $x=\pi$

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

§5. Ряды Фурье четных и нечетных функций

I. Пусть $f(x)\in R([-\pi,\pi])$ и $f(x)$ — четная. Найдем выражения для коэффициентов Фурье в этом случае. Имеем

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}\cdot\underbrace{\cos nx}_{\text{четн.}}}_{\text{четн.}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}\cdot\underbrace{\sin nx}_{\text{нечетн.}}}_{\text{нечетн.}}dx=0,\quad n=1,2,\ldots \tag{3}$$

Таким образом, доказана **теорема.**

Пусть:

1) $f(x)\in R([-\pi,\pi])$,

2) $f(x)$ — четная.

Ряд Фурье такой функции не содержит синусов кратных дуг, т. е.

$$f(x)\sim A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

причем коэффициенты A, a_n $(n=1,2,\ldots)$ можно вычислить по формулам:

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx;\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

II. Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$ и $f(x)$ — нечетная. Для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ в этом случае будем иметь

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}} dx = 0, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}} \cdot \underbrace{\cos nx}_{\text{четн.}}}_{\text{нечетн.}} dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}} \cdot \underbrace{\sin nx}_{\text{нечетн.}}}_{\text{четн.}} dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Следовательно, доказана **теорема.**

Пусть:

1) $f(x) \in R([-\pi, \pi])$,

2) $f(x)$ — нечетная.

Ряд Фурье такой функции не содержит свободного члена и косинусов кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты b_n ($n = 1, 2, \ldots$) можно вычислить по формуле

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Пример 1. Пусть $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Видим, что для этой функции выполнены условия основной теоремы. Кроме того, замечаем, что $f(-x) = -f(x)$, т. е. $f(x)$ — нечетная. Поэтому $A = 0$; $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$);

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_{0}^{\pi} x \cdot d\cos nx = -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_{0}^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} \right] =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\pi\cos n\pi = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}.$$

Получаем, следовательно:

1) Для $x \in (-\pi, \pi)$:

$$x = 2\cdot\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

2) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точках $x = -\pi$; $x = \pi$ равна:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Изобразим графически $y = x$ и $y = S(x)$.

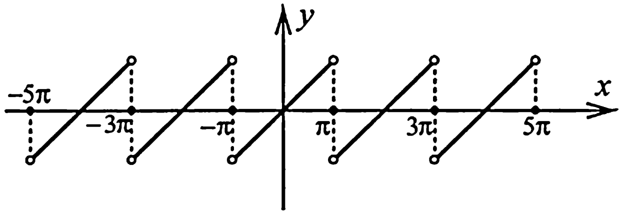


Рис. 15.4. График функции $y = S(x)$

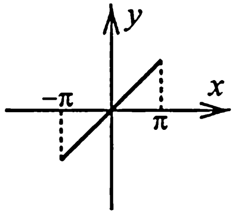


Рис. 15.5. График функции $y = f(x)$

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Видим, что для этой функции выполнены условия основной теоремы. Замечаем, далее, что $f(-x) = f(x)$, т. е. $f(x)$ — четная. Поэтому $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2 d\sin nx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\underbrace{x^2\sin nx\Big|_0^\pi}_{=0} - 2\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx = \frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0}\right] = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Получаем, следовательно,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} + \dots\right). \quad (7)$$

Отметим, что равенство (7) верно для всех $x \in [-\pi, \pi]$, ибо $f(-\pi) = f(\pi)$.

Изобразим графически $y = x^2$ и $y = S(x)$.

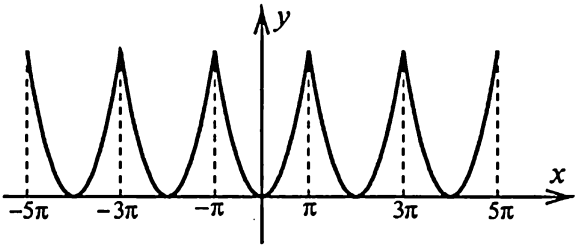


Рис. 15.6. График функции $y = S(x)$

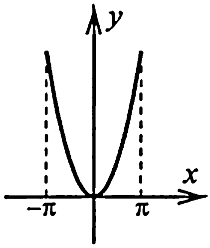


Рис. 15.7. График функции $y = f(x)$

Положим в равенстве (7) $x = \pi$. Получим

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Итак,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (8)$$

Найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \quad (9)$$

Для этого подсчитаем сначала сумму ряда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots \qquad (10)$$

Имеем

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)\overset{(8)}{=}\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}.$$

Но тогда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}.$$

§6. Разложение в ряд Фурье функции, заданной в "неполном" промежутке

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a,\pi]$, где $-\pi<a<\pi$, непрерывна там и имеет конечные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$. Выберем произвольную функцию $g(x)$, заданную в промежутке $[-\pi, a)$, непрерывную там и имеющую конечные $g'_+(x)$, $g'_-(x)$. Пусть, кроме того, функция $g(x)$ такая, что существуют конечные пределы: $g(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{g(x)-g(a-0)}{x-a}$. Введем в рассмотрение "составную" функцию $F(x)$, положив

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in[a,\pi], \\ g(x), & \text{если } x\in[-\pi,a). \end{cases} \qquad (1)$$

К функции $F(x)$ уже применима предыдущая теория (основная теорема и ее обобщение). Согласно этой теории, для всех $x\in[-\pi,\pi]$, кроме, быть может, точек $x=a$, $x=-\pi$, $x=\pi$, будет

$$F(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (2)$$

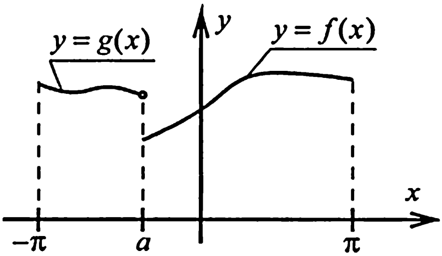


Рис. 15.8. График функции $y = F(x)$

В частности, для всех $x \in (a, \pi)$ будет

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

(ибо $F(x) = f(x)$, $x \in (a, \pi)$). Отметим, что согласно той же теории, ряд, стоящий в правой части (3), сходится и при $x = a$ и при $x = \pi$, причем сумма его $S(x)$ в этих точках такова:

$$S(a) = \frac{g(a-0) + f(a)}{2}$$

($f(x)$ задана и непрерывна справа в точке $x = a$),

$$S(\pi) = \frac{g(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Следует иметь в виду, что в правой части равенства (3) стоит ряд Фурье функции $F(x)$. Поэтому

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{a} g(x)\,dx + \int_{a}^{\pi} f(x)\,dx\right];$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{a} g(x)\cos nx\,dx + \int_{a}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right], \quad n = 1,2,\ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{a} g(x)\sin nx\,dx + \int_{a}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right], \quad n = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Замечание 1. Если "дополнительная" функция $g(x)$ такая, что $g(a-0)=f(a)$, $g(-\pi)=f(\pi)$, то разложение (3) будет верно во всем замкнутом промежутке $[a,\pi]$.

Замечание 2. Из формул (4) видим, что коэффициенты A, a_n, b_n $(n=1,2,\dots)$ в ряде (3) зависят от $g(x)$, а $g(x)$ — произвольная функция. Поэтому существует бесчисленное множество тригонометрических рядов, представляющих нашу функцию $f(x)$, заданную в "неполном" промежутке (напомним, что для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi,\pi]$, есть только один тригонометрический ряд, равномерно сходящийся, представляющий $f(x)$, — это ее ряд Фурье).

Рассмотрим случай, когда $a=0$.

I. В этом случае можно, в частности, положить

$$g(x)=f(-x),\qquad x\in[-\pi,0). \tag{5}$$

При этом будет

$$g(-0)=f(0);\qquad g(-\pi)=f(\pi). \tag{6}$$

При таком выборе "дополнительной" функции $g(x)$ "составная" функция $F(x)$ оказывается четной и будет, следовательно, разлагаться в ряд Фурье по косинусам. Принимая во внимание *замечание 1*, будем иметь для всех $x\in[0,\pi]$:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{7}$$

причем здесь

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad n=1,2,\dots,$$

так как $F(x)=f(x)$ для $x\in[0,\pi]$.

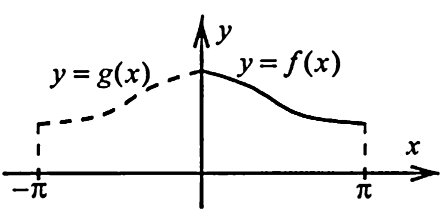


Рис. 15.9. График функции $y=F(x)$

II. В случае, когда $a = 0$, можно также, в частности, положить

$$g(x) = -f(-x), \quad x \in [-\pi, 0).$$

При таком выборе "дополнительной" функции $g(x)$ "составная" функция $F(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье по синусам. Это разложение будет справедливо, вообще говоря, лишь для $x \in (0, \pi)$, т. е. получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in (0, \pi), \tag{8}$$

причем здесь

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (8), сходится и при $x = 0$ и при $x = \pi$. Его сумма $S(x)$ в этих точках равна нулю. Заметим, что если функция $f(x)$, заданная на промежутке $[0, \pi]$, такая, что $f(0) = 0$ и $f(\pi) = 0$, то разложение (8) будет верно в замкнутом промежутке $[0, \pi]$; если же $f(0) = 0$, а $f(\pi) \neq 0$, то разложение (8) будет верно в $[0, \pi)$.

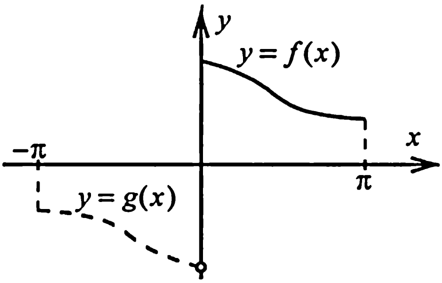


Рис. 15.10. График функции $y = F(x)$

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, разложена в ряд Фурье по синусам (значит, $g(x) = -x^2$, $x \in [-\pi, 0)$). Пусть $S(x)$ — сумма ряда. Здесь $f(0) = 0$; $f(\pi) = \pi^2 (\neq 0)$. Равенство $x^2 = S(x)$ верно при $0 \le x < \pi$. $S(\pi) = 0$ $\left(S(\pi) = \frac{g(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi^2 + \pi^2}{2} = 0\right)$.

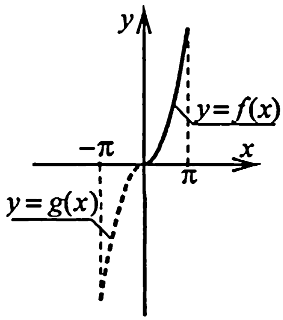


Рис. 15.11. График функции $y = F(x)$

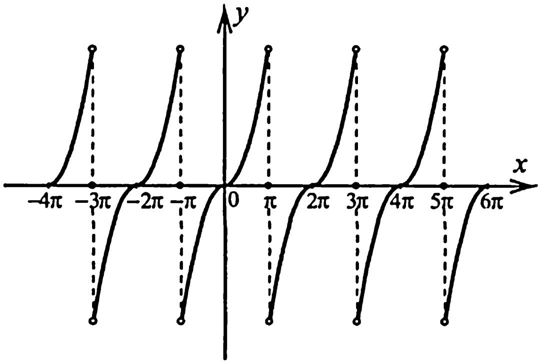


Рис. 15.12. График функции $y = S(x)$

§7. Сдвиг основного промежутка

Отметим, что основная теорема и ее обобщение, установленные для случая, когда функция $f(x)$ была задана на промежутке $[-\pi, \pi]$, целиком переносятся на тот случай, когда функция $f(x)$ задается на каком-нибудь другом промежутке $[a, a+2\pi]$ той же длины 2π.

Только в этом случае, вычисляя коэффициенты Фурье A, a_n, b_n, в качестве пределов интегрирования следует брать концы промежутка $[a, a+2\pi]$.

Пример. Разложить в ряд Фурье в промежутке $[0, 2\pi]$ функцию $f(x) = x$.

▶ Видим, что $f(x)$ в промежутке $[0, 2\pi]$ удовлетворяет условиям основной теоремы. Находим коэффициенты Фурье этой функции:

1) $A = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \pi$.

2) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\,d(\sin nx) =$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\underbrace{x\sin nx\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx}_{=0}\right] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

3) $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\,d(\cos nx) =$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos nx\,dx}_{=0}\right] = -\frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Получаем, таким образом:

1) для $x \in (0, 2\pi)$:

$$x = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right); \qquad (1)$$

2) сумма $S(x)$ ряда, стоящего в правой части (1), на концах промежутка, т. е. при $x = 0$ и при $x = 2\pi$, равна:

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi .$$

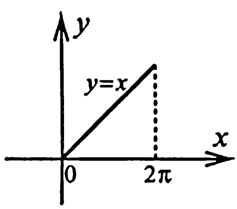


Рис. 15.13. График функции $y = f(x)$

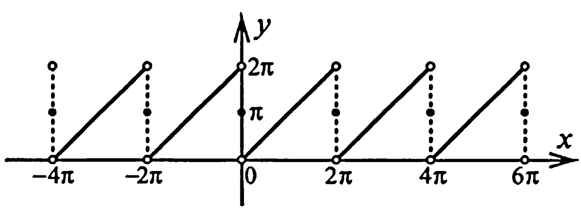


Рис. 15.14. График функции $y = S(x)$

§8. Растяжение основного промежутка

Пусть функция $f(x) \in R([-l, l])$, где $l > 0$ — любое конечное число. Заметим, что если $z \in [-\pi, \pi]$, то $\frac{lz}{\pi} \in [-l, l]$. Поэтому, если сделать замену, положив $\frac{lz}{\pi} = x$, то мы получим функцию $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$, т. е. функцию аргумента z, заданную в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Ясно, что:

1) если $f(x) \in R([-l, l])$, то $f\left(\frac{lz}{\pi}\right) \in R([-\pi, \pi])$;

2) если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-l, l]$, то $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$;

3) если у функции $f(x)$ на промежутке $[-l, l]$ существует конечная производная $f'(x)$, то у функции $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ существует конечная производная на промежутке $[-\pi, \pi]$, и т. д.

К функции $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$, заданной в промежутке $[-\pi, \pi]$, применима предыдущая теория (т. е. основная теорема и ее обобщение). Так, предполагая, например, функцию $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ дифференцируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$, будем иметь для всех $z \in (-\pi, \pi)$:

$$f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz), \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)dz; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\cos nz\, dz; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\sin nz\, dz,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Ряд, стоящий в правой части (1), сходится и на концах промежутка; его сумма в точках $z = -\pi$, $z = \pi$, равна:

$$\frac{f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\Big|_{z=-\pi} + f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\Big|_{z=\pi}}{2} = \frac{f(-l) + f(l)}{2}.$$

Вернемся теперь к прежней переменной, т. е. положим $z = \frac{\pi x}{l}$ (ясно, что если $z \in [-\pi, \pi]$, то $x \in [-l, l]$). Будем иметь тогда вместо (1) для всех $x \in (-l, l)$:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (2)$$

Формулы для коэффициентов A, a_n, b_n подстановкой $z = \frac{\pi x}{l}$ приводятся к виду

$$A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

Сумма $S(x)$ ряда (2) в точках $x = -l$; $x = l$ будет равна сумме ряда (1) в точках $z = -\pi$, $z = \pi$, а следовательно, равна $\frac{f(-l) + f(l)}{2}$.

Отметим также, что $S(x + 2l) \equiv S(x)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функцию $f(x) = x\cos x$.

▶ Имеем здесь $[-l, l] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$.

$f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ — нечетная функция. Значит, $A = 0$; $a_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin 2nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{1}{2}[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,d\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi}x\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^2} + \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\right] = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-8n}{(4n^2-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{16n}{(4n^2-1)^2}.$$

Так как $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(0) = 0$, то для всех $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ будем иметь

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2} \cdot \sin 2nx. \blacktriangleleft$$

Замечание. Все установленное в §8 для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-l, l]$, целиком переносится на тот случай, когда функция $f(x)$ задается на каком-нибудь другом промежутке $[a, a+2l]$ той же длины $2l$. Только в этом случае, вычисляя коэффициенты Фурье A, a_n, b_n, в качестве пределов интегрирования следует брать концы промежутка $[a, a+2l]$.

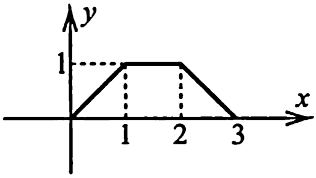


Рис. 15.15. График функции $y = f(x)$

Пример. Разложить в ряд Фурье в промежутке $[0, 3]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2; \\ 3 - x, & \text{если } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

$\blacktriangleright$ В этом примере имеем $2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$.

$$A = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 1 \cdot dx + \int_2^3 (3-x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + x\Big|_1^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3\right] = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx + \int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx + \int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} - 0 + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} + \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} + \frac{6}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{4n\pi}{3}\right].$$

Так как $\cos\frac{4n\pi}{3} = \cos\left(2n\pi - \frac{2n\pi}{3}\right) = \cos\frac{2n\pi}{3}$, то получаем

$$a_n = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - 1\right) = -\frac{3}{\pi^2}\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx + \int_1^2 \sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx + \int_2^3 (3-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}x\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 - \frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2 -\right.$$

$$-\frac{9}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3-\left(-\frac{3}{2n\pi}x\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_2^3\Bigg]=$$

$$=\frac{2}{3}\Big[-\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-$$

$$-\frac{9}{2n\pi}+\frac{9}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{9}{2n\pi}-\frac{6}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{4n\pi}{3}\Big]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{4\pi n}{3}\right).$$

Так как $\sin\frac{4\pi n}{3}=\sin\left(2n\pi-\frac{2n\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2n\pi}{3}$, то $b_n=0$, $n=1,2,3,\ldots$

У нас $f(x)\in C([0,3])$ и $f(0)=f(3)$. Поэтому для всех $x\in[0,3]$ будет

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$$

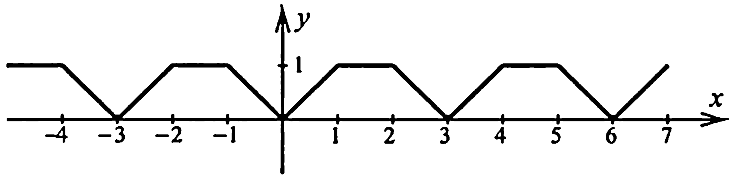


Рис. 15.16. График функции $y=S(x)$

§9. Интеграл Фурье

I. Наводящие соображения.

Пусть функция $f(x)$ задана на всей оси, т. е. в промежутке $(-\infty,+\infty)$, и не является периодической. Пусть всюду в промежутке $(-\infty,+\infty)$ она имеет конечную производную $f'(x)$. Пусть, наконец, функция $f(x)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится. Выберем и закрепим какую-нибудь точку x. Всегда можно указать число l столь большое, что выбранное x будет удовлетворять условию $-l < x < l$. Так как $f(x)$ в промежутке $[-l, l]$ удовлетворяет условиям основной теоремы (см. теорию рядов Фурье), то в выбранной точке x будет

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Имеем

$$|A| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l}. \tag{2}$$

Здесь через Q обозначена величина несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$; Q — конечное число, ибо по условию $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится. Из (2) следует, что $A \to 0$ при $l \to +\infty$. Будем считать l весьма большим. Тогда A весьма мало, и потому

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3}$$

Подставив в (3) вместо a_n и b_n их выражения, будем иметь

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\left[\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]dt. \tag{4}$$

(У нас x — закрепленное число, поэтому множители, зависящие от x, вносим под знак интеграла.) Так как $\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \cos\frac{n\pi}{l}(t - x)$, то приближенное равенство (4) примет вид

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t - x)\,dt. \tag{5}$$

Заметим что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$, $n=1,2,\dots$, сходятся, ибо $\left|f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\right| \le |f(t)|$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится. Поскольку l велико, то без большой ошибки вместо $\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$ можно брать $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$. А тогда вместо (5) будем иметь

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt. \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt. \qquad (7)$$

$F(z)$ — непрерывная функция аргумента z (подынтегральная функция в (7) — непрерывная функция аргументов t и z; интеграл, стоящий в правой части (7), сходится равномерно относительно z, ибо $|f(t)\cos z(t-x)| \le |f(t)|$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится). Положим

$$z_0 = 0; \quad z_1 = \frac{\pi}{l}; \quad z_2 = \frac{2\pi}{l}; \quad z_3 = \frac{3\pi}{l}; \quad \dots; \quad z_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \dots$$

Тогда $F(z_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$, и (6) может быть записано в виде

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}F(z_n). \qquad (8)$$

Имеем $\Delta z_n = z_n - z_{n-1} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{\Delta z_n}{\pi}$ и, следовательно, вместо (8) будем иметь

$$f(x) \approx \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F(z_n)\,\Delta z_n. \qquad (9)$$

Сумма, стоящая в правой части (9), — вроде “интегральной суммы Римана” и при больших l она должна быть близка к интегралу

$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F(z)\,dz$ (чем больше l, тем мельче дробление). Таким образом, приходим к выводу: приближенное равенство

$$f(x) \approx \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F(z)\,dz \tag{10}$$

тем точнее, чем больше l. Но так как ни левая, ни правая части этого приближенного равенства от l не зависят, то оно точное, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F(z)\,dz \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt. \tag{11}$$

(11) — *интегральная формула Фурье.*

II. Строгая теория.

Лемма. Пусть:

1) функция $\varphi(t)$ определена в промежутке $[0,+\infty)$ и непрерывна там;

2) сходится $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$;

3) сходится $\int\limits_0^{1} \frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt$.

Тогда

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\cdot\frac{\sin at}{t}\,dt = \varphi(0)\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

▶ Покажем сначала, что $J(a) = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt$ сходится при любом a. Видим, что у несобственного интеграла $J(a)$ две особые точки: $t=0$ и $t=+\infty$. Поэтому представляем $J(a)$ в виде

$$J(a) = \underbrace{\int\limits_0^{1}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt}_{=J_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt}_{=J_2}.$$

Рассмотрим J_1. У него точка $t=0$ — единственная особая точка. Имеем $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)\frac{\sin at}{t} = a\cdot\varphi(0)$ — конечное число при любом a. Значит, подынтегральная функция в J_1 — ограниченная в правой полуокрестности точки $t=0$. Следовательно, J_1 сходится при любом a.

Рассмотрим J_2. У него точка $t=+\infty$ — единственная особая точка. Имеем: если $t \geq 1$, то $\left|\varphi(t)\dfrac{\sin at}{t}\right| \leq |\varphi(t)|$ при любом a. По условию, $\int\limits_0^{+\infty}|\varphi(t)|dt$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty}|\varphi(t)|dt$ сходится, а следовательно, J_2 сходится при любом a. Общий вывод: $J(a)$ сходится при любом a.

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, сколь угодно малое. По условию, $\int\limits_0^{+\infty}|\varphi(t)|dt$ сходится. Значит, он представляет собой некоторое конечное число. Поэтому можно выбрать число $M>0$ столь большим, чтобы было

$$\frac{1}{M}\cdot\int\limits_0^{+\infty}|\varphi(t)|dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Представим интеграл $J(a)$ в виде

$$J(a)=\underline{\int\limits_0^M \varphi(t)\frac{\sin at}{t}dt}+\int\limits_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}dt=$$

$$=\underline{\int\limits_0^M \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt}+\underline{\varphi(0)\int\limits_0^M \frac{\sin at}{t}dt}+\int\limits_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}dt.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену $at=\tilde{t}$. Получим $\int\limits_0^M\frac{\sin at}{t}dt=\int\limits_0^{aM}\frac{\sin\tilde{t}}{\tilde{t}}d\tilde{t}$ $\left(=\int\limits_0^{aM}\frac{\sin t}{t}dt\right.$, так как переменную интегрирования можно обозначать любой буквой). А тогда $J(a)$ запишется в виде

$$J(a)=\int\limits_0^M \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt+\int\limits_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}dt+\varphi(0)\int\limits_0^{aM}\frac{\sin t}{t}dt. \tag{14}$$

Так как $\dfrac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = \int\limits_0^{aM} \dfrac{\sin t}{t} dt + \int\limits_{aM}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$, то

$$\varphi(0) \cdot \frac{\pi}{2} = \varphi(0) \cdot \int\limits_0^{aM} \frac{\sin t}{t} dt + \varphi(0) \cdot \int\limits_{aM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Поэтому

$$J(a) - \varphi(0)\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^M \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \sin at\, dt + \int\limits_M^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin at}{t} dt - \varphi(0) \int\limits_{aM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \tag{15}$$

Произведем оценку каждого из трех членов правой части (15).

1) Имеем

$$\int\limits_0^M \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{t} dt = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{t} dt}_{\text{(сходится по условию)}} + \underbrace{\int\limits_1^M \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{t} dt}_{\text{(собственный интеграл)}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int\limits_0^M \dfrac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{t} dt$ сходится. А тогда по обобщенной теореме Римана — Лебега

$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_0^M \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \sin at\, dt = 0.$$

Последнее означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $A_1 > 0$, такое, что как только $a > A_1$, так сейчас же $\left| \int\limits_0^M \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \sin at\, dt \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

2) Имеем $\left| \int\limits_M^{+\infty} \varphi(t) \dfrac{\sin at}{t} dt \right| \le \int\limits_M^{+\infty} \dfrac{|\varphi(t)|}{M} dt < \dfrac{1}{M} \int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (см. (13)).

3) Известно, что $\int\limits_{aM}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$ сходится. Значит, $\lim\limits_{a \to +\infty} \int\limits_{aM}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt = 0$.

Следовательно, взятому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $A_2 > 0$, такое, что как только $a > A_2$, так сейчас же $|\varphi(0)| \cdot \left| \int\limits_{aM}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Положим

$A = \max\{A_1, A_2\}$. Тогда при $a > A$ будем иметь $\left|J(a) - \varphi(0)\cdot\frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$.

Последнее означает, что $J(a) \underset{a\to+\infty}{\to} \varphi(0)\cdot\frac{\pi}{2}$. ◀

Теорема. Пусть:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$;

2) $f(x)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится.

Тогда в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$, в которой сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t}\,dt$, справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt. \tag{16}$$

▶ Рассмотрим функцию $f(t)\cos z(t-x)$. Это непрерывная функция аргументов t и z (x здесь закреплено; это та точка, для которой устанавливается формула (16)). Так как $|f(t)\cos z(t-x)| \le |f(t)|$ и так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt = F(z)$ сходится равномерно относительно z. Таким образом, приходим к заключению, что $F(z)$ — непрерывная функция параметра z и ее можно интегрировать по z на любом конечном промежутке под знаком интеграла, т. е.

$$\int\limits_0^a F(z)\,dz = \int\limits_0^a dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int\limits_0^a \cos z(t-x)\,dz\right)dt,$$

или

$$\int\limits_0^a dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin a(t-x)}{t-x}\,dt. \tag{17}$$

Интеграл, стоящий в правой части (17), разобьем по схеме $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{+\infty}$ и заменим t на $x - t_1$ в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{x}$ и t на $x + t_1$ в интеграле $\int\limits_{x}^{+\infty}$. Тогда равенство (17) примет вид

$$\int\limits_0^a dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} [f(x+t_1) + f(x-t_1)] \frac{\sin at_1}{t_1} dt_1 . \quad (18)$$

К правой части (18) можно применить лемму, положив

$$f(x+t_1) + f(x-t_1) = \varphi(t_1) .$$

Заметим, что функция $\varphi(t_1)$ удовлетворяет условиям леммы. В самом деле:

1) $\varphi(t_1)$ определена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$, ибо функция f определена и непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t_1)|\, dt_1 = \int\limits_0^{+\infty} |f(x+t_1) + f(x-t_1)|\, dt_1$ — сходится, ибо

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(x+t_1) + f(x-t_1)|\, dt_1 \le \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} |f(x+t_1)|\, dt_1}_{\text{сходится}} + \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} |f(x-t_1)|\, dt_1}_{\text{сходится}} < +\infty;$$

3) $\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(0)|}{t_1} dt_1 = \int\limits_0^1 \frac{|f(x+t_1) + f(x-t_1) - 2f(x)|}{t_1} dt_1$ — сходится по условию.

Будем иметь, следовательно, из (18):

$$\int\limits_0^a dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x)\, dt \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} 2f(x) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot f(x) ,$$

а это равносильно доказываемой формуле (16). ◀

Замечание. Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Пусть:

1) функция $f(x)$ определена в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на каждом конечном промежутке;

2) $f(x)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится.

Тогда:

I) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна и в которой сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}dt$, будет

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt.$$

II) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода и в которой сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)|}{t}dt$, будет

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt.$$

§10. Различные виды формулы Фурье

В этом параграфе предполагается, что выполнены условия, при которых интегральная формула Фурье имеет место. (Для простоты будем считать функцию $f(x)$ непрерывной на промежутке $(-\infty,+\infty)$.)

I. Замечаем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt$ представляет собой четную функцию аргумента z (x закреплено). Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt.$$

Следовательно, интегральная формула Фурье может быть записана в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt. \qquad \text{(I)}$$

II. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$.

Этот интеграл представляет собой нечетную функцию аргумента z. Отметим, что рассматриваемый интеграл сходится равномерно относительно z, ибо $|f(t)\sin z(t-x)| \le |f(t)|$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится. Так как, кроме того, функция $f(t)\sin z(t-x)$ — непрерывная функция аргументов t и z (x здесь закреплено), то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$ — непрерывная функция аргумента z. Гарантировать сходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$ нельзя, но если A — любое конечное число, то $\int\limits_{-A}^{A} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt = 0$. Поэтому

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt = 0.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с (I). Получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos z(t-x) + i\sin z(t-x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{iz(t-x)}dt$$

(здесь применена формула Эйлера $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$). Чаще эту формулу пишут так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{iz(t-x)}dt. \qquad \text{(II)}$$

Но здесь всегда следует помнить, что внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

III. Вернемся к формуле $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt$. Так как $\cos z(t-x)=\cos zt\cos zx+\sin zt\sin zx$, то

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,(\cos zt\cos zx+\sin zt\sin zx)\,dt.$$

Положим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt=a(z), \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt=b(z). \tag{2}$$

А тогда будем иметь

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}\left[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx\right]dz. \tag{III}$$

(Это и есть третий вид формулы Фурье.)

Частные случаи формулы (III).

1) Если $f(x)$ — функция четная, то $b(z)=0$, $a(z)=$ $=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt$, и формула (III) примет вид

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}a(z)\cos zx\,dz. \tag{III$_1$}$$

2) Если $f(x)$ — функция нечетная, то $a(z)=0$, $b(z)=$ $=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt$, и формула (III) примет вид

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}b(z)\sin zx\,dz. \tag{III$_2$}$$

Замечание. Форма (III) интеграла Фурье аналогична ряду Фурье. Подынтегральная функция в (III) напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота z, непрерывно изменяясь, пробегает все значения от 0 до ∞, и поэтому суммирование осуществляется интегралом по z от 0 до ∞. Функции $a(z)$ и $b(z)$ определяются по формулам (1) и (2), похожим на выражения для коэффициентов a_n и b_n ряда Фурье, и при изменении z от 0 до ∞ указывают закон изменения амплитуд и начальных фаз тех гармоник, "суммирование" которых, осуществляемое интегралом Фурье, дает функцию $f(x)$.

Этот закон изменения амплитуд и начальных фаз "слагаемых" в интегральном изображении функции $f(x)$ будет более обозрим, если подынтегральную функцию формулы (III) привести к тригонометрическому одночлену. Для этого положим:

$$M(z) = \sqrt{a^2(z) + b^2(z)}; \quad \frac{a(z)}{M(z)} = \sin\varphi_z; \quad \frac{b(z)}{M(z)} = \cos\varphi_z.$$

Тогда

$$a(z)\cos zx + b(z)\sin zx = M(z)(\sin\varphi_z \cos zx + \cos\varphi_z \sin zx) =$$
$$= M(z)\sin(zx + \varphi_z),$$

и формула (III) примет вид

$$f(x) = \int_0^{+\infty} M(z)\sin(zx + \varphi_z)\,dz. \qquad (\text{III}_*)$$

§11. Формулы Фурье для функции, заданной на промежутке $[0, +\infty)$

Теорема. Пусть:

1) функция $f(t)$ определена и непрерывна на $[0, +\infty)$;

2) $f(t)$ такая, что $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится.

Тогда в каждой точке x ($x > 0$), в которой сходится интеграл $\int_0^x \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t}\,dt$, справедливы формулы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz, \qquad (1)$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt\right)\sin zx\,dz. \qquad (2)$$

Формула (1) верна также и при $x=0$, если сходится интеграл $\int_0^1\frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt$.

Формула же (2) при $x=0$, вообще говоря, неверна (она верна лишь для таких функций $f(t)$, у которых $f(0)=0$).

▶ 1) Пусть $x>0$.

а) Положим

$$F(t)=\begin{cases} f(t) & \text{для } t\ge 0,\\ f(-t) & \text{для } t<0.\end{cases}$$

Функция $F(t)$ определена и непрерывна на всей оси; она — четная, и $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|dt=2\int_0^{+\infty}|f(t)|dt$ сходится. Имеем, далее,

$$\int_0^x\frac{|F(x+t)+F(x-t)-2F(x)|}{t}dt=\int_0^x\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}dt$$

сходится (см. условие). Видим, что для функции $F(t)$ выполнены все условия главной теоремы. Так как функция $F(t)$ — четная, то имеет место формула (III_1) предыдущего параграфа, т. е.

$$F(x)=\int_0^{+\infty}a(z)\cos zx\,dz,\ \text{где}\ a(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F(t)\cos zt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt.$$

Но для $x>0$: $F(x)=f(x)$. Поэтому для $x>0$ будем иметь

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz.$$

б) Положим

$$\widetilde{F}(t)=\begin{cases} f(t) & \text{для } t\ge 0,\\ -f(-t) & \text{для } t<0.\end{cases}$$

Функция $\tilde{F}(t)$ определена на всей оси. Она непрерывна всюду, кроме разве лишь точки $t = 0$. Функция $\tilde{F}(t)$ — нечетная, и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{F}(t)\right|dt = \int_{-\infty}^{0}|f(-t)|dt + \int_{0}^{+\infty}|f(t)|dt = 2\int_{0}^{+\infty}|f(t)|dt$$

сходится. Имеем, далее,

$$\int_0^x \frac{\left|\tilde{F}(x+t) + \tilde{F}(x-t) - 2\tilde{F}(x)\right|}{t}dt = \int_0^x \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t}dt$$

сходится по условию. Так как $\tilde{F}(t)$ — нечетная функция, то для нее справедлива формула (III_2) предыдущего параграфа, которая для $x > 0$ равносильна доказываемой формуле (2).

Следует отметить, что так как $\tilde{F}(t)$, вообще говоря, разрывна в точке $t = 0$, то формулу (III_2) мы вправе применить к ней не на основании главной теоремы, а на основании ее обобщения.

2) Пусть $x = 0$. Положим, как и в 1),

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{для} \quad t \geq 0, \\ f(-t) & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Эта функция четная, непрерывная на промежутке $(-\infty, +\infty)$, и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|dt$ сходится (см. случай 1)). Имеем, далее

$$\int_0^1 \frac{|F(t) + F(-t) - 2F(0)|}{t}dt = 2\int_0^1 \frac{|F(t) - F(0)|}{t}dt = 2\int_0^1 \frac{|f(t) - f(0)|}{t}dt$$

сходится по условию. Значит, $F(0)$ представима формулой (III_1) предыдущего параграфа, а это равносильно тому, что $f(0)$ представима формулой (1) настоящего параграфа.

Пример 1. Пусть $f(t) = e^{-t}$, $t \in [0;+\infty)$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Напишем для нее формулы (1) и (2):

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz, \qquad x \geq 0, \qquad (\tilde{1})$$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin zt\,dt\right)\sin zx\,dz, \quad x > 0. \qquad (\tilde{2})$$

Положим $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos zt\,dt$; $\beta = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin zt\,dt$. Интегрируя по частям, находим:

$$\alpha = \int_0^{+\infty}\cos zt\,d(-e^{-t}) = \left[-e^{-t}\cos zt\right]\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - z\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin zt\,dt = 1 - \beta z;$$

$$\beta = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin zt\,dt = \int_0^{+\infty}\sin zt\,d(-e^{-t}) =$$

$$= \left[-e^{-t}\sin zt\right]\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos zt\,dt = \alpha z.$$

Итак, получили:

$$\begin{cases}\alpha = 1 - \beta z, \\ \beta = \alpha z\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{1}{1+z^2};\ \beta = \frac{z}{1+z^2}.$$

Подставляя эти выражения для α и β в формулы $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$ соответственно, находим

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos zx}{1+z^2}dz, \ x \geq 0, \quad \text{и} \quad e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zx}{1+z^2}dz,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos zx}{1+z^2}dz = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geq 0, \qquad (3)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zx}{1+z^2}dz = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x > 0. \qquad (4)$$

Пример 2. Функцию

$$f(x) = \begin{cases}1, & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{при } x \geq 1\end{cases}$$

представить интегралом Фурье, продолжив ее четным образом на левую полуось.

▶ Используем формулу

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\int\limits_0^{+\infty} a(z)\cos zx\,dz,$$

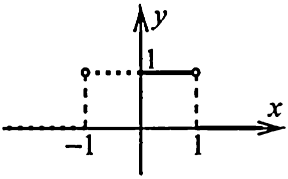


Рис. 15.17. График функции $y=f(x)$

где

$$a(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\cos zt\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin zt}{z}\Bigg|_{t=0}^{t=1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin z}{z}$$

(в точке $z=0$ последнее равенство следует понимать в предельном смысле). Имеем, следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\cos zx dz=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{при } 0\le x<1;\\ \frac{\pi}{4}, & \text{при } x=1;\\ 0, & \text{при } x>1.\end{cases} \tag{5}$$

Полагая в (5) $x=0$, получим $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, мы нашли значение интеграла, для которого неопределенный интеграл не берется в конечном виде. Подобным же образом можно вычислить и многие другие определенные интегралы, что является одним из приложений теории интеграла Фурье.

Равенство (5) позволяет подметить еще одну сторону применений интеграла Фурье. Этим интегралом можно на всей оси изобразить функцию, которая на различных ее частях задается совершенно различными формулами.

§12. Гармонический анализ непериодических функций

Пусть непериодическая функция $f(x)$ представлена интегралом Фурье (для простоты будем считать эту функцию непрерывной на всей оси):

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} M(z)\sin(zx+\varphi_z)\,dz. \tag{1}$$

Здесь подынтегральное выражение есть гармоника с амплитудой $M(z)dz$, частотой z и начальной фазой φ_z.

Функция $y = M(z)$ называется *частотным спектром плотностей амплитуд.* Изучая эту функцию, мы находим те промежутки изменения z, которым соответствуют относительно большие значения $M(z)$, т. е. те "полосы частот", которым соответствуют гармоники, играющие наибольшую роль в образовании данной функции $f(x)$ интегралом Фурье. Это аналогично тому, как, отбрасывая остаток ряда Фурье, мы ограничиваемся суммой лишь нескольких гармоник, которая приближенно представляет данную функцию на промежутке $(-l, l)$.

В радиотехнике этот гармонический анализ используется, например, следующим образом. Имеется некоторый непериодический посторонний сигнал (помеха), от которого нужно, по возможности, освободить приемник. Пусть сила тока, который индуктирует в антенне приемника эта помеха, известна как функция времени $f(x)$ (здесь x обозначает время). Функцию $f(x)$ находят обычно эмпирически. Тогда, представляя эту функцию интегралом Фурье, мы рассматривая спектр плотностей амплитуд, определяем те полосы частот, из гармоник, соответствующих которым, "состоит в основном" этот ток помехи.

Строя тот или иной фильтр, не пропускающий в приемник именно эту полосу частот, мы и сведем к минимуму действие помехи.

Пример. Пусть x — время, I_0 и ω — положительные постоянные числа, I — сила тока в некоторой цепи, изменяющаяся по закону $I = I_0 e^{-\omega x}$.

Функция $I = I_0 e^{-\omega x}$ удовлетворяет условиям теоремы §11, по которой для $x \in [0, +\infty)$ справедлива формула

$$I(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} I(t)\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I(x) = \frac{2I_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos zx\,dz\int_0^{+\infty} e^{-\omega t}\cos zt\,dt.$$

Так как $\int_0^{+\infty} e^{-\omega t}\cos zt\,dt = \dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$, то получаем

$$I(x) = \frac{2I_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos zx}{z^2+\omega^2}dz = \int_0^{+\infty}\frac{2I_0\omega}{\pi(z^2+\omega^2)}\sin\left(zx+\frac{\pi}{2}\right)dz.$$

Видим, что начальная фаза здесь постоянна: $\varphi_z = \frac{\pi}{2}$, а частотный спектр распределения плотностей амплитуд

$$M(z) = \frac{2I_0\omega}{\pi(z^2+\omega^2)}.$$

Легко видеть, что функция $y = M(z)$ — строго убывающая для $z \in [0, +\infty)$ (ибо $M'(z) < 0$). Следовательно, наибольшее значение эта функция имеет при $z = 0$: $M(0) = \frac{2I_0}{\pi\omega}$. При $z = \frac{\omega}{\sqrt{3}}$ график функции $y = M(z)$ имеет точку перегиба,

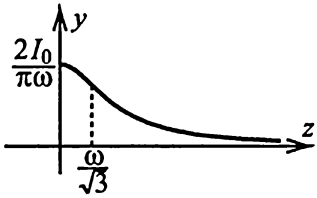


Рис. 15.18. График функции $y = M(z)$

и при дальнейшем возрастании z, став выпуклым вниз, он достаточно быстро приближается к оси Oz: $\lim\limits_{z\to+\infty} M(z) = 0$ (рис. 15.18). Таким образом, лишь гармоники с малыми частотами имеют существенное значение в образовании функции $I = I_0e^{-\omega x}$.

§13. Преобразования Фурье

Пусть функция $f(x)$, заданная на полуоси $[0, +\infty)$, удовлетворяет условиям теоремы §11. Тогда для $x \in (0, +\infty)$ справедливы формулы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos zx\,dz\int_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt \qquad (1)$$

и

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin zx\,dz\int_0^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt. \qquad (2)$$

I. В формуле (1) обозначим $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt$ через $\Phi(z)$. Будем иметь тогда

$$\Phi(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt, \tag{3}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \Phi(z)\cos zx\,dz. \tag{4}$$

Видим, что функции $f(x)$ и $\Phi(z)$ совершенно одинаково выражаются одна через другую интегральной формулой, которая называется *преобразованием Фурье.* Так, $\Phi(z)$, получаемая из $f(t)$ по формуле (3), есть преобразование Фурье функции $f(t)$. Функция же $f(x)$, получаемая из $\Phi(z)$ по формуле (4), есть преобразование Фурье функции $\Phi(z)$. Так как формулы (3) и (4) содержат косинус, то они чаще называются *косинус-преобразованиями Фурье.*

II. В формуле (2) обозначим $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt$ через $\Phi_*(z)$. Будем иметь тогда

$$\Phi_*(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt, \tag{5}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \Phi_*(z)\sin zx\,dz. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) дают другую пару соответствующих друг другу функций. Эти формулы называются *синус-преобразованиями Фурье.*

Если в формуле (3) $\Phi(z)$ есть данная функция, $f(t)$ — искомая, то формула (3) называется *интегральным уравнением* для функции $f(t)$. Формула (4) дает решение этого интегрального уравнения. Совершенно аналогично можно рассматривать и пару формул (5) и (6).

Так, например, если дано уравнение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt=e^{-z},$$

где $f(x)$ — искомая функция, то его решением будет

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z}\cos xz\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Глава 16

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Определение 1. Пусть K есть некоторый класс бесконечных рядов. Пусть λ есть некоторое правило, которое каждому ряду класса K соотносит определенное число S (свое для каждого ряда). Тогда правило λ называется *методом суммирования* рядов. Число S называют *обобщенной суммой* (или λ*-суммой*) ряда, а про ряды класса K говорят, что они суммируются методом λ.

Определение 2. Метод λ называется *перманентным*, если он суммирует все ряды, сходящиеся в обычном смысле, и если та обобщенная сумма, которую он приписывает этим рядам, совпадает с их обычной суммой.

Условимся называть перманентный метод *интересным*, если он суммирует хотя бы один ряд, расходящийся в обычном смысле.

Примеры.

1. Припишем всем рядам обобщенную сумму $S = 5$. Этот метод — не перманентный (очевидно).

2. Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Припишем ряду (1) в качестве суммы число $S = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, если этот предел существует, и не приписываем ничего, если этот предел не существует. Этот метод — перманентный, но он не интересен, так как суммирует лишь ряды, сходящиеся в обычном смысле.

3. Пусть правило λ всякому ряду $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ соотносит в качестве суммы число $S = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})$, если этот предел существует, и не соотносит ничего, если этот предел не существует. Очевидно, что этот метод — перманентный. Он — интересный, так как суммирует расходящийся ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Обобщенная сумма S этого ряда равна нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = 0$).

§1. Метод средних арифметических (метод Чезаро)

Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Пусть $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, то говорят, что ряд (1) суммируется *методом средних арифметических* (или: *методом C*), а число S называют его *обобщенной суммой.*

Теорема 1. Метод C — перманентный.

▶ Это следует из теоремы 2. ◀

Теорема 2. Пусть переменная x_n имеет конечный предел l. Составим новую переменную $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Тогда $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Так как $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} l$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер m, такой, что как только $k > m$, так сейчас же $|x_k - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n > m$. Имеем

$$y_n - l = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - l = \frac{(x_1 - l) + (x_2 - l) + \ldots + (x_n - l)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_n - l| \le \frac{|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l| + |x_{m+1} - l| + \ldots + |x_n - l|}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |y_n - l| \le \frac{|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l|}{n} + \frac{(n - m)\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |y_n - l| \le \frac{|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l| = A(\varepsilon)$ (это число закреплено при закрепленном ε). Тогда $|y_n - l| < \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$. Но $\frac{A(\varepsilon)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Поэтому существует номер p, такой, что как только $n > p$, так сейчас же $\frac{A(\varepsilon)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\max(m, p) = N$. Ясно, что при $n > N$ окажется $|y_n - l| < \varepsilon$ (N зависит от ε). Существование такого N для любого $\varepsilon > 0$ и означает, что $y_n \underset{n\to\infty}{\to} l$. ◀

Замечание. Метод C — интересный, ибо он суммирует расходящийся в обычном смысле ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ к сумме $S = \frac{1}{2}$.

▶ Действительно, имеем для любого $n \in \mathbb{N}$: $S_{2n} = 0$; $S_{2n-1} = 1$. Значит,

$$\sigma_{2n} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{2n-1} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n-1}}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2},$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$. ◀

Теорема 3 (Фейер). Пусть функция $f(t) \in R_{2\pi}$. Составим ее ряд Фурье: $A + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Положим

$$S_0(x) = A; \quad S_i(x) = A + \sum_{k=1}^{i}(a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Тогда:

1) в каждой точке x разрыва первого рода функции $f(t)$ оказывается $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$;

2) в каждой точке x, где $f(t)$ непрерывна, будет $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;

3) если $f(t)$ непрерывна на всей оси, то $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$.

▶ Мы знаем, что частичные суммы ряда Фурье для функции $f(t) \in R_{2\pi}$ выражаются интегралами Дирихле.

$$S_p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}\,dt, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

А тогда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}\left[\sin t + \sin 3t + \ldots + \sin(2n-1)t\right]dt.$$

Подсчитаем сумму, стоящую в квадратных скобках под знаком интеграла. Положим $T = \sin t + \sin 3t + \ldots + \sin(2n-1)t$. Умножим обе части этого равенства на $2\sin t$. Получим

$$2T\sin t = 2\sin^2 t + 2\sin t\sin 3t + \ldots + 2\sin t\sin(2n-1)t.$$

Но $2\sin^2 t = 1-\cos 2t$; $2\sin A\sin B = \cos(B-A) - \cos(B+A)$. Поэтому

$$2T\sin t = (1-\cos 2t) + (\cos 2t - \cos 4t) + (\cos 4t - \cos 6t) + \ldots +$$

$$+\left(\cos(2n-2)t - \cos 2nt\right) = 1 - \cos 2nt = 2\sin^2 nt \quad\Rightarrow\quad T = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}$$

(в точках, где $\sin t$ обращается в нуль, это равенство следует понимать в предельном смысле). Следовательно, выражение для $\sigma_n(x)$ может быть записано в виде

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \qquad (2)$$

Итак, для всякой функции $f(t) \in R_{2\pi}$ $\sigma_n(x)$ выражается через $f(t)$ по формуле (2).

Пусть, в частности, $f(t) \equiv 1$. Для такой функции, как мы знаем, $S_0(x) = S_1(x) = S_2(x) = \ldots = S_{n-1}(x) = 1$. Поэтому

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} = 1,$$

и формула (2) принимает вид

$$1 = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt. \qquad (3)$$

1) Пусть в точке x существуют конечные $f(x+0)$ и $f(x-0)$ (т. е. точка x является точкой разрыва первого рода для $f(t)$). Умножим обе части (3) на $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и вычтем из (2). Получим

$$\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \{[f(x+2t) - f(x+0)] + [f(x-2t) - f(x-0)]\} \cdot \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

Положим $|f(x+2t) - f(x+0)| + |f(x-2t) - f(x-0)| = H(t)$. Тогда

$$\left| \sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right| \le \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} H(t) \cdot \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt \qquad (4)$$

(заметим, что $H(t)$ — бесконечно малая величина при $t \to +0$).

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Так как $H(t)$ — бесконечно малая величина при $t \to +0$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что как только $0 < t \le \delta$, так сейчас же $H(t) < \varepsilon$ (можно считать $\delta < \frac{\pi}{2}$). У нас $f(t) \in R_{2\pi}$, а значит, интегрируема на любом конечном промежутке. Следовательно, $f(t)$ — ограниченная на любом конечном промежутке, а, в силу периодичности, ограниченная везде. Положим $M = \sup\{|f(t)|\}$.

Запишем неравенство (4) в виде

$$\left| \sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right| \le \frac{1}{n\pi} \int_0^{\delta} H(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt + \frac{1}{n\pi} \int_\delta^{\pi/2} H(t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

В первом интеграле правой части $H(t) < \varepsilon$. Значит,

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta} H(t)\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \underset{\uparrow}{<} \frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \overset{(3)}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

(раздвинули пределы, а подынтегральная функция положительная)

Итак,

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Очевидно, что $H(t) \le 4M$. Кроме того, при $t \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ будет $\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \le \frac{1}{\sin^2\delta}$. Поэтому

$$\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \le \frac{1}{n\pi}\cdot 4M\cdot\frac{1}{\sin^2\delta}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) <$$

$$< \frac{1}{n\pi}\cdot 4M\cdot\frac{1}{\sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

А тогда

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Ясно, что $\frac{2M}{n\sin^2\delta} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, ибо $M = \text{const}$, а $\delta > 0$ — закреплено вместе с ε. Значит, найдется номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, и тем самым $\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \varepsilon$ при $n > N$. Последнее означает, что $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Этим доказано первое утверждение теоремы.

2) Второе утверждение теоремы есть частный случай первого утверждения. Значит, доказано и оно.

3) Пусть функция $f(t)$ непрерывна на всей оси. Тогда в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$: $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, и, сле-

довательно, функция $H(t)=|f(x+2t)-f(x)|+|f(x-2t)-f(x)|$. Ясно, что $H(t)$ — бесконечно малая величина при $t\to+0$. Поэтому любому $\varepsilon>0$, выбранному заранее, отвечает $\delta>0$, такое, что как только $0<t\le\delta$, так сейчас же $H(t)<\varepsilon$. Отметим, что число $\delta>0$ выбирается по ε, но для каждого x оно будет, вообще говоря, своим, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon,x)$.

У нас $f(t)$ — функция, непрерывная на всей оси. Так как $f(t)$ еще и периодическая, то она будет равномерно непрерывной. А тогда (в этом частном случае) δ будет зависеть только от ε (δ не будет зависеть от x), а значит, и номер N будет зависеть только от ε (N не будет зависеть от x). Стало быть, неравенство $\left|\sigma_n(x)-\dfrac{f(x+0+f(x-0)}{2}\right|=|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ будет верно при $n>N$ для любого x. Так как N зависит только от ε (N не зависит от x), то последнее означает, что $\sigma_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f(x)$. ◀

Замечание. Если функция $f(t)\in R_{2\pi}$ и в некоторой точке x_0 $f(t)$ — непрерывна, то ряд Фурье для $f(t)$ в точке x_0 не может сходиться к сумме, отличной от $f(x_0)$. Действительно, если он сходится к сумме α, то (по перманентности метода C) будет $\sigma_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}\alpha$. С другой стороны, по теореме Фейера будет $\sigma_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}f(x_0)$. Поэтому $\alpha=f(x_0)$.

§2. Теоремы Вейерштрасса

Определение. *Тригонометрическим многочленом* называется функция вида

$$T(x)=P+\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx).$$

Примерами таких многочленов служат частичные суммы тригонометрических рядов, а также средние арифметические этих частичных сумм.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то существует такая последовательность тригонометрических многочленов

$$T_1(x),\ T_2(x),\ T_3(x),\ \dots,\ T_n(x),\ \dots\ ,$$

которая сходится к $f(x)$ равномерно на всей оси, т. е. $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Требуемая последовательность получается, если образовать для $f(x)$ суммы Фейера $\sigma_n(x)$, ибо $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Другие формулировки теоремы.

A. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ будет $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

▶ Это верно потому, что за $T(x)$ можно взять любой член последовательности $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, у которого номер $n > N$ (номер N зависит лишь только от ε). ◀

B. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд тригонометрических многочленов.

▶ Пусть $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность тригонометрических многочленов, такая что $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Положим

$$Q_1(x) = T_1(x),$$

$$Q_2(x) = T_2(x) - T_1(x),$$

$$Q_3(x) = T_3(x) - T_2(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_n(x) = T_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ясно, что $Q_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ — это тригонометрические многочлены. Образуем ряд:

$$Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x) + \ldots \tag{1}$$

Ясно, что $Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x) = T_n(x)$. У нас $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Значит, частичные суммы ряда (1) сходятся равномерно к $f(x)$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Но это и означает, что $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, причем ряд сходится равномерно.

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$, то всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такой алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$, что для всех $x \in [a, b]$ будет $\left|f(x) - \widetilde{P}(x)\right| < \varepsilon$.

▶ 1. Пусть сначала $a = -\pi$, $b = +\pi$ и $f(-\pi) = f(+\pi)$. Распространим определение $f(x)$ на всю ось, положив $f(x + 2\pi) = f(x)$. Тогда $f(x)$ будет задана на промежутке $(-\infty, +\infty)$, всюду непрерывна и 2π-периодична.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По второй теореме Вейерштрасса, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает тригонометрический многочлен $T(x) = P + \sum\limits_{k=1}^{n}(p_k \cos kx + q_k \sin kx)$, такой, что при всех вещественных x будет $|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Закрепим этот $T(x)$ и положим $\sum\limits_{k=1}^{n}(|p_k| + |q_k|) = M$.

Как известно, функции $\sin z$ и $\cos z$ разлагаются в степенные ряды:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \tag{3}$$

причем эти ряды сходятся равномерно на любом конечном промежутке. Обозначим через $S_m(z)$ и $C_m(z)$ m-е частичные суммы рядов (2) и (3) соответственно. Выберем m столь большим, чтобы при всех $z \in [-n\pi, n\pi]$ было бы

$$|S_m(x) - \sin z| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad |C_m(z) - \cos z| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

(Здесь n есть порядок $T(x)$, который мы закрепили. Значит, n — закрепленное число.) Положим

$$\widetilde{P}(x) = P + \sum_{k=1}^{n} \left[p_k C_m(kx) + q_k S_m(kx)\right]. \qquad (4)$$

Ясно, что $\widetilde{P}(x)$ есть алгебраический многочлен. Пусть $x \in [-\pi, \pi]$ и k есть какое-нибудь из чисел: $1, 2, 3, \dots, n$. Тогда $kx \in [-n\pi, n\pi]$, и потому

$$|C_m(kx) - \cos kx| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad |S_m(kx) - \sin kx| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Следовательно,

$$\left|T(x) - \widetilde{P}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left\{|p_k| \cdot |\cos kx - C_m(kx)| + |q_k| \cdot |\sin kx - S_m(kx)|\right\} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left(|p_k| + |q_k|\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, $|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (это верно для всех вещественных x, и, в частности, для $x \in [-\pi, \pi]$). Кроме того, для $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|T(x) - \widetilde{P}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ Имеем

$$f(x) - \widetilde{P}(x) = [f(x) - T(x)] + \left[T(x) - \widetilde{P}(x)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \widetilde{P}(x)\right| \le |f(x) - T(x)| + \left|T(x) - \widetilde{P}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для } x \in [-\pi, \pi],$$

а это и требовалось доказать.

2. Пусть по-прежнему $a = -\pi$, $b = +\pi$, но $f(-\pi) \ne f(+\pi)$. Положим $A = \dfrac{f(-\pi) - f(+\pi)}{2\pi}$. Тогда $f(+\pi) + A\pi = f(-\pi) - A\pi$. Введем в рассмотрение функцию $g(x) = f(x) + Ax$. Она также определена на $[-\pi, \pi]$, непрерывна там и, кроме того, $g(+\pi) = g(-\pi)$.

Поэтому к функции $g(x)$ можно применить уже доказанную часть теоремы. Значит, существует алгебраический многочлен $\widetilde{P}_1(x)$ такой, что при всех $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|g(x) - \widetilde{P}_1(x)\right| < \varepsilon$, или (что то же самое)

$$\left|f(x) + Ax - \widetilde{P}_1(x)\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|f(x) - \left[\widetilde{P}_1(x) - Ax\right]\right| < \varepsilon.$$

Поэтому алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x) = \widetilde{P}_1(x) - Ax$ такой, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|f(x) - \widetilde{P}(x)\right| < \varepsilon$, что и требовалось установить.

3. Пусть $[a, b]$ — произвольный промежуток. Положим

$$y = \frac{2\pi(x-a) - \pi(b-a)}{b-a}. \tag{5}$$

Из (5) видим, что если $x \in [a, b]$, то $y \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, видим, что связь между x и y можно записать и так:

$$x = \frac{2\pi a + (y+\pi)(b-a)}{2\pi}. \tag{6}$$

(если $y \in [-\pi, \pi]$, то $x \in [a, b]$). Введем в рассмотрение функцию аргумента y: $f\left(\dfrac{2\pi a + (y+\pi)(b-a)}{2\pi}\right)$. Эта функция определена и непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$. Значит, существует многочлен $Q(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k y^k$, такой, что при всех $y \in [-\pi, \pi]$ будет

$$\left|f\left(\frac{2\pi a + (y+\pi)(b-a)}{2\pi}\right) - \sum_{k=0}^{m} c_k y^k\right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Возьмем любое x из $[a, b]$ и положим $y = \dfrac{2\pi(x-a) - \pi(b-a)}{b-a}$. Тогда $y \in [-\pi, \pi]$, и можно подставить это y в (7), что дает $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{m} c_k \left[\dfrac{2\pi(x-a) - \pi(b-a)}{b-a}\right]^k\right| < \varepsilon$, т. е. алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \left[\frac{2\pi(x-a) - \pi(b-a)}{b-a}\right]^k$ — требуемый, а это и требовалось доказать. ◀

Другие формулировки первой теоремы Вейерштрасса.

А. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то существует последовательность алгебраических многочленов: $\left\{\widetilde{P}_k(x)\right\}_{k\in\mathrm{N}}$, сходящаяся к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

▶ Возьмем последовательность $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$, , $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, . По доказанному выше, для каждого $\varepsilon_n = \frac{1}{n}(> 0)$ найдется многочлен $\widetilde{P}_n(x)$, такой, что для всех $x \in [a, b]$ будет $\left|\widetilde{P}_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon_n$. Следовательно, $\widetilde{P}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in [a, b]$. ◀

В. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то она разлагается на $[a, b]$ в равномерно сходящийся ряд алгебраических многочленов.

▶ Пусть $\left\{\widetilde{P}_n(x)\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ — последовательность алгебраических многочленов, такая, что $\widetilde{P}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in [a, b]$. Положим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Q}_1(x) = \widetilde{P}_1(x),\\
&\widetilde{Q}_2(x) = \widetilde{P}_2(x) - \widetilde{P}_1(x),\\
&\widetilde{Q}_3(x) = \widetilde{P}_3(x) - \widetilde{P}_2(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\widetilde{Q}_n(x) = \widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_{n-1}(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ясно, что $\widetilde{Q}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ — алгебраические многочлены. Образуем ряд

$$\widetilde{Q}_1(x) + \widetilde{Q}_2(x) + \ldots + \widetilde{Q}_n(x) + \ldots \tag{8}$$

Видим, что $\widetilde{Q}_1(x)+\widetilde{Q}_2(x)+\ldots+\widetilde{Q}_n(x)=\widetilde{P}_n(x)$. У нас $\widetilde{P}_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x\in[a,\,b]$. Но $\widetilde{P}_n(x)$ оказывается n-й частичной суммой ряда (8). Так как частичные суммы ряда (8) сходятся равномерно к $f(x)$ на $[a,\,b]$, то приходим к заключению, что $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{Q}_k(x)$, $x\in[a,\,b]$, причем ряд (8) сходится равномерно на $[a,\,b]$. ◀

§3. Средние квадратические приближения функций

Задача. Пусть функция $f(x)$ — такая, что $f(x)\in R([-\pi,\,\pi])$. Рассматриваются всевозможные тригонометрические многочлены порядка не выше n:

$$T(x)=P+\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx).$$

Для каждого такого тригонометрического многочлена составляется выражение $r_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx$ (r_n называется *средним квадратическим отклонением* $T(x)$ от $f(x)$). Требуется найти такой тригонометрический многочлен $T(x)$, чтобы r_n получило наименьшее возможное значение.

▶ *Решение.* Введем коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx;\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx;\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

(эти коэффициенты известны, так как функция $f(x)$ дана). Имеем:

1) $$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[P+\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)\right]dx=$$

$$=2\pi A\cdot P+\sum_{k=1}^{n}\pi(a_kp_k+b_kq_k)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)\,dx=2PA+\sum_{k=1}^{n}(p_ka_k+q_kb_k).\qquad(1)$$

$$2)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[P + \sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx + q_k\sin kx)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P^2dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(p_k^2\cos^2 kx + q_k^2\sin^2 kx)\,dx$$

(интегралы от всех удвоенных произведений исчезают благодаря ортогональности системы: 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., $\cos nx$, $\sin nx$ на промежутке $[-\pi, \pi]$), откуда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T^2(x)\,dx = 2P^2 + \sum_{k=1}^{n}(p_k^2 + q_k^2). \qquad (2)$$

Подставим (1) и (2) в выражение для r_n. Получим

$$r_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^2(x) - 2f(x)T(x) + T^2(x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx + 2P^2 + \sum_{k=1}^{n}(p_k^2 + q_k^2) - 2\left[2PA + \sum_{k=1}^{n}(p_k a_k + q_k b_k)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx + \underline{2(P-A)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[(p_k - a_k)^2 + (q_k - b_k)^2\right]} -$$

$$-\left[2A^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \qquad (3)$$

В выражении (3) для r_n от P, p_k, q_k зависят только подчеркнутые члены. Эти члены неотрицательны и обращаются в нуль лишь тогда, когда $P = A$, $p_k = a_k$, $q_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. тогда, когда $T(x)$ оказывается n-й частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема Теплера. Пусть функция $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Из всех тригонометрических многочленов порядка не выше n наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции $f(x)$ имеет n-я частичная сумма ее ряда Фурье:

$$S_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \blacktriangleleft$$

При этом упомянутое отклонение $\rho_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx$ (через ρ_n обозначено r_n в этом случае) может быть записано и так:

$$\rho_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \left[2A^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \qquad (4)$$

(4) получается из (3), ибо подчеркнутые члены исчезают, когда $T(x) = S_n(x)$.

Из определения ρ_n видно, что $\rho_n \geq 0$ и, следовательно,

$$2A^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N}. \qquad (5)$$

Последнее означает, что частичные суммы положительного ряда

$$2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \qquad (6)$$

ограничены сверху и потому этот ряд сходится. Переходя в неравенстве (5) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx . \qquad (7)$$

Ниже будет показано, что на самом деле в (7) стоит знак равенства, т. е.

$$2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx . \qquad (8)$$

Формула (8) носит название *формулы замкнутости*. Ее можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 . \qquad (9)$$

Теорема А.М. Ляпунова. Для любой функции $f(x) \in R([-\pi, \pi])$ справедлива формула замкнутости $2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$.

$\blacktriangleright$ α) Ясно, что ρ_n убывает с ростом n, т. е. $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_k \geq \ldots$. Это видно из выражения (4) для ρ_n.

β) Представим $f(x)$ в виде суммы двух функций: $f(x) = \bar{f}(x) + \bar{\bar{f}}(x)$, причем считаем, что все эти функции интегрируемы на промежутке $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $S_n(x)$, $\bar{S}_n(x)$, $\bar{\bar{S}}_n(x)$ n-е частичные суммы рядов Фурье для функций $f(x)$, $\bar{f}(x)$, $\bar{\bar{f}}(x)$ соответственно. Пусть ρ_n, $\bar{\rho}_n$, $\bar{\bar{\rho}}_n$ — средние квадратические отклонения указанных сумм от самих функций. Тогда справедливо неравенство

$$\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{\bar{f}}^2(x)\,dx. \tag{10}$$

В самом деле, имеем $S_n(x) = \bar{S}_n(x) + \bar{\bar{S}}_n(x)$ (это очевидно). А тогда

$$f(x) - S_n(x) = \left(\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)\right) + \left(\bar{\bar{f}}(x) - \bar{\bar{S}}_n(x)\right).$$

Как известно, $(A - B)^2 \le 2(A^2 + B^2)$. Следовательно,

$$\left(f(x) - S_n(x)\right)^2 \le 2\cdot\left[\left(\bar{f}(x) - \bar{S}_n(x)\right)^2 + \left(\bar{\bar{f}}(x) - \bar{\bar{S}}_n(x)\right)^2\right].$$

Интегрируя это неравенство по x от $-\pi$ до π и деля на π, получаем

$$\rho_n \le 2(\bar{\rho}_n + \bar{\bar{\rho}}_n). \tag{11}$$

Но

$$\bar{\bar{\rho}}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{\bar{f}}^2(x)\,dx - \left[2\bar{\bar{A}}^2 + \sum_{k=1}^{n}(\bar{\bar{a}}_k^2 + \bar{\bar{b}}_k^2)\right] \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{\bar{f}}^2(x)\,dx.$$

Отсюда и из (11) следует (10).

Перейдем теперь к доказательству теоремы Ляпунова.

1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и такая, что $f(-\pi) = f(+\pi)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По второй теореме Вейерштрасса, существует тригонометрический многочлен (порядка m): $T_m(x) = P + \sum_{k=1}^{m}(p_k\cos kx + q_k\sin kx)$, такой, что $|f(x) - T_m(x)| \le \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$. А тогда $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_m(x)\right)^2 dx \le \varepsilon$. Но частичная сумма $S_m(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет наименьшее среднее квадратическое отклонение от $f(x)$. Значит,

$$\rho_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_m(x)\right)^2 dx \le \varepsilon .$$

Итак, $\rho_m \le \varepsilon$. Было отмечено, что $\{\rho_k\}_{k\in N}$ — убывающая. Поэтому, тем более при $n > m$, будет $\rho_n \le \varepsilon$, а это и значит, что $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Более сложные виды функции $f(x)$ приводятся к только что рассмотренному.

2. Пусть $f(x)$ — ступенчатая функция. Это значит, что промежуток $[-\pi, \pi]$ разлагается точками

$$-\pi = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s = \pi$$

на такие промежутки $[a_i, a_{i+1}]$, что в интервалах (a_i, a_{i+1}) функция $f(x)$ постоянна. Пусть, например, при $x \in (a_i, a_{i+1})$: $f(x) = c_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots s-1$). (Нас не будет интересовать, каковы значения $f(x)$ в граничных точках промежутков $[a_i, a_{i+1}]$.) Очевидно, что $f(x)$ — ограниченная функция (s — число конечное, т. е. конечное число ступенек). Значит, существует число M, такое, что $|f(x)| \le M$ для $x \in [-\pi, \pi]$.

Введем новую функцию $\bar{f}(x)$, задав ее так:

$$\begin{cases} \bar{f}(a_i) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, s); \\ \bar{f}(x) = c_i \quad \text{для} \quad a_i + \delta \le x \le a_{i+1} - \delta \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, s-1); \\ \bar{f}(x) \ - \ \text{линейна для} \quad a_i \le x \le a_i + \delta \quad \text{и для} \quad a_{i+1} - \delta \le x \le a_{i+1}. \end{cases}$$

Здесь δ подчинено условию: $0 < \delta < \dfrac{a_{i+1} - a_i}{2}$; в дальнейшем выбор δ будет уточнен.

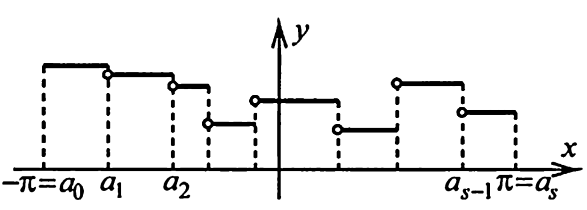


Рис. 16.1. График ступенчатой функции $y = f(x)$

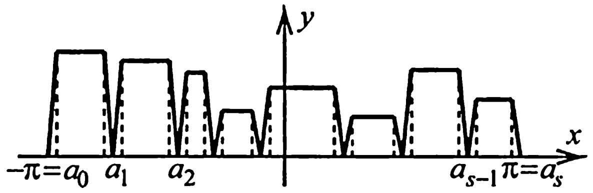


Рис. 16.2. График функции $y = \bar{f}(x)$

Функция $y = \bar{f}(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$ и такая, что ее значения на концах промежутка одинаковы, т. е. $\bar{f}(-\pi) = \bar{f}(+\pi) = 0$. Значит, по уже доказанному (см. пункт 1.) $\bar{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Очевидно, далее, что $\left|\bar{f}(x)\right| \le M$ для $x \in [-\pi, \pi]$.

Положим теперь $f(x) - \bar{f}(x) = \bar{\bar{f}}(x)$. Тогда $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \left[\int\limits_{a_i}^{a_i+\delta} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx + \int\limits_{a_{i+1}-\delta}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \right],$$

так как на промежутках $[a_i + \delta, a_{i+1} - \delta]$ $\bar{f}(x) = f(x)$, и, следовательно, $\bar{\bar{f}}(x) = 0$. У нас

$$\bar{\bar{f}}(x) = f(x) - \bar{f}(x) \quad \Rightarrow \quad \left|\bar{\bar{f}}(x)\right| \le |f(x)| + \left|\bar{f}(x)\right| \le 2M.$$

Значит,

$$\int\limits_{a_i}^{a_i+\delta} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 4M^2 \cdot \delta \quad \text{и} \quad \int\limits_{a_{i+1}-\delta}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 4M^2 \cdot \delta.$$

А тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 8M^2\delta \cdot s$ и, следовательно, $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + 16\frac{M^2\delta \cdot s}{\pi}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. До сих пор мы не уточняли выбора δ. Теперь будем считать его таким, что $\frac{16M^2\delta s}{\pi} < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + \frac{\varepsilon}{3}$ (при всех n). Но $\bar{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, найдется номер N, такой, что при $n > N$ будет $\bar{\rho}_n < \frac{\varepsilon}{3}$ и тем самым $\rho_n < \varepsilon$, если $n > N$. Последнее означает, что $\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, а это и требовалось доказать.

3. *Общий случай.*

Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое и разделим промежуток $[-\pi, \pi]$ точками $a_0 = -\pi < a_1 < a_2 < \ldots < a_s = \pi$ на столь малые части, чтобы

$$\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i (a_{i+1} - a_i) < \frac{\varepsilon}{\Omega}.$$

Здесь ω_i — колебание функции $f(x)$ на промежутке $[a_i, a_{i+1}]$; Ω — колебание функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. (Такое разбиение возможно, так как $f(x)$ интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$, а это — необходимое и достаточное условие интегрируемости.)

Введем в рассмотрение новую функцию $\bar{f}(x)$, положив

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = a_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s \quad (\text{в узлах}); \\ f\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right), \text{ если } x \in (a_i, a_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, s-1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\bar{f}(x)$ — функция ступенчатая, и потому $\bar{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $f(x) - \bar{f}(x) = \bar{\bar{f}}(x)$. Тогда, как мы знаем, $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Имеем $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{s-1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Заметим, что если $x \in (a_i, a_{i+1})$, то $\left|\bar{\bar{f}}(x)\right| = \left|f(x) - f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\right| \le \omega_i$.

Поэтому

$$\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \omega_i^2 (a_{i+1} - a_i). \tag{12}$$

(Это так, несмотря на то, что оценка $\left(\bar{\bar{f}}(x)\right)^2 \le \omega_i^2$ справедлива лишь для $x \in (a_i, a_{i+1})$, ибо изменение значений подынтегральной функции в двух точках не изменяет величину интеграла.)

Так как $\omega_i \le \Omega$, $i = 0, 1, 2, \dots, s-1$, то вместо (12) можем написать $\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \omega_i(a_{i+1} - a_i)\cdot\Omega$. А тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(a_{i+1} - a_i)\cdot\Omega < \frac{\varepsilon}{\Omega}\cdot\Omega = \varepsilon,$$

и, следовательно, $\rho_n < 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi}\cdot\varepsilon$, и тем более $\rho_n < 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{3}\cdot\varepsilon$, ибо $\pi > 3$. Было отмечено, что $\bar{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, найдется номер N, такой, что при $n > N$ будет: $\bar{\rho}_n < \frac{\varepsilon}{6}$, и тем самым $\rho_n < \varepsilon$, если $n > N$. Последнее означает, что $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а это и требовалось установить. ◀

Пример. Ранее, при разложении функции $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, в ряд Фурье, было получено: для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} + \dots\right)$$

(здесь $A = \frac{\pi^2}{3}$; $a_n = (-1)^n\frac{4}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$; $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$). По формуле замкнутости $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ в нашем примере будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = 2\cdot\frac{\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Следствия теоремы Ляпунова.

1. Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$ и A, a_n, b_n — коэффициенты Фурье этой функции. Пусть $g(x) \in R([-\pi, \pi])$ и P, p_n, q_n — ее коэффициенты Фурье. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 2AP + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n p_n + b_n q_n)\,. \tag{13}$$

(Это — обобщенная формула замкнутости; сама формула замкнутости получается из (13) при $g(x) = f(x)$.)

▶ Ясно, что сумма $f(x) + g(x)$ имеет коэффициентами Фурье $A + P$; $a_n + p_n$; $b_n + q_n$. По теореме Ляпунова имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = 2P^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_n^2 + q_n^2)\,, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) + g(x)\big)^2 dx = 2(A + P)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(a_n + p_n)^2 + (b_n + q_n)^2\Big]. \tag{16}$$

Вычитая (14) и (15) из (16), получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 4AP + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n p_n + b_n q_n) \quad\Rightarrow\quad (13).\ ◀$$

2. Подставим в (13) выражения для P, p_n, q_n. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = A\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx\right].$$

Таким образом, соотношение

$$f(x) \sim A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{17}$$

можно почленно интегрировать, умножив его предварительно на любую интегрируемую в промежутке $[-\pi, \pi]$ функцию $g(x)$, и при этом получается точное равенство.

3. Пусть $[l, m] \in [-\pi, \pi]$. Возьмем в качестве функции $g(x)$ функцию, заданную следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [l, m], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus [l, m]. \end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$\int_l^m f(x)\,dx = A\int_l^m dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_l^m \cos nx\,dx + b_n \int_l^m \sin nx\,dx\right].$$

Видим, что соотношение (17) можно почленно интегрировать по любому сегменту, содержащемуся в $[-\pi, \pi]$, и при этом получается точное равенство.

§4. Полнота тригонометрической системы

Определение. Пусть функция $f(x) \in R([a, b])$. Если $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$, то говорят, что $f(x)$ *эквивалентна нулю*, и пишут: $f(x) \sim 0$.

(Заметим, что в том случае, когда $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$, из $f(x) \sim 0$ вытекает, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Для разрывных функций это не так. Например, функция, отличная от нуля в конечном числе точек промежутка $[a, b]$, эквивалентна нулю, но не тождественна ему.)

Теорема 1. Пусть $f(x) \in R([a, b])$. Если $f(x) \sim 0$, то все ее коэффициенты Фурье равны нулю.

▶ Действительно, по теореме Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

У нас $f(x) \sim 0 \iff \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow 2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 0$. Но последнее имеет место лишь тогда, когда одновременно $A = 0$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. ◀

Теорема 2. Пусть $f(x) \in R([a, b])$. Если все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ равны нулю, то $f(x) \sim 0$.

▶ По формуле замкнутости Ляпунова имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

По условию, $A = 0$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Но тогда $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) \sim 0$. ◀

Теорема 3. Пусть $f(x) \in R([a, b])$ и $g(x) \in R([a, b])$. Если все коэффициенты Фурье у этих функций совпадают, то $(f(x) - g(x)) \sim 0$, т. е. $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g(x)]^2 dx = 0$.

▶ Пусть A, a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$; P, p_k, q_k — коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Ясно, что разность $f(x) - g(x)$ имеет коэффициентами Фурье $A - P$, $a_k - p_k$, $b_k - q_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). По теореме Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g(x)]^2 dx = 2(A - P)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k - p_k)^2 + (b_k - q_k)^2\right].$$

По условию, $A = P$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Но тогда $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g(x)]^2 dx = 0$. А это означает, что $(f(x) - g(x)) \sim 0$. ◀

В случае, когда $(f(x) - g(x)) \sim 0$, говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* друг другу.

Замечание. Если, в частности, $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывны, то из совпадения их коэффициентов Фурье вытекает, что $f(x) \equiv g(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Теорема 4. Тригонометрическую систему

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots \tag{1}$$

нельзя дополнить никакой непрерывной функцией $\varphi(x)$ (кроме как нулем), которая была бы ортогональна ко всем функциям системы (1).

▶ Рассуждаем от противного. Предположим, что существует непрерывная, отличная от нуля, функция $\varphi(x)$, ортогональная ко всем функциям системы (1). Но тогда все коэффициенты Фурье этой функции:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx = 0; \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, по теореме 2: $\varphi(x) \sim 0$. А так как $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [-\pi, \pi]$. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. ◀

Утверждение, доказанное в теореме 4, называют *полнотой тригонометрической системы (1).*

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(+\pi)$. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно, то сумма его и есть $f(x)$ (т. е. $f(x)$ разлагается на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье).

▶ Обозначим сумму ряда Фурье функции $f(x)$ через $S(x)$. По условию $S(x)$ есть сумма равномерно сходящегося на промежутке $[-\pi, \pi]$ тригонометрического ряда. Стало быть, этот ряд будет рядом Фурье для $S(x)$. Таким образом, оказывается, что наш ряд является рядом Фурье как для функции $f(x)$, так и для своей суммы $S(x)$ (т. е. $f(x)$ и $S(x)$ имеют один и тот же ряд Фурье). Но $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$. ($f(x)$ — по условию, а $S(x)$ — как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Но тогда $S(x) \equiv f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. ◀

Замечание. Теперь мы можем для такой функции $f(x)$ построить ее ряд Фурье и проверить, сходится ли он равномерно на промежутке $[-\pi, \pi]$. Если ряд оказывается равномерно сходящимся, то его сумма и есть $f(x)$ (т. е. $f(x)$ разлагается на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье).

Теорема 6. Если функция $f(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ и если $f(-\pi) = f(+\pi)$, то $f(x)$ разлагается в $[-\pi, \pi]$ в равномерно сходящийся ряд Фурье.

▶ Пусть a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а α_n и β_n — коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad\Rightarrow\quad \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n} f'(x)\,dx = -\frac{\pi\beta_n}{n};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad\Rightarrow\quad \pi b_n = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\underbrace{\left[f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n} f'(x)\,dx = \frac{\pi\alpha_n}{n}.$$

Итак, получили $a_n = -\frac{\beta_n}{n}$; $b_n = \frac{\alpha_n}{n}$. Как известно, $AB \le A^2 + B^2$. Следовательно,

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2} + \beta_n^2; \qquad |b_n| \le \frac{1}{n^2} + \alpha_n^2.$$

По условию, $f'(x) \in C([-\pi, \pi]) \Rightarrow f'(x) \in R([-\pi, \pi]) \Rightarrow$ для $f'(x)$ справедлива формула замкнутости Ляпунова $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$. Кроме того, мы знаем, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. А тогда приходим к выводу, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right)$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in [-\pi, \pi]$:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le \left(|a_n| + |b_n|\right),$$

то заключаем, что ряд $A + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ сходится равномерно на промежутке $[-\pi, \pi]$. А тогда по теореме 5 получаем: $f(x)$ разлагается на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье (причем этот ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$). ◀

§5. Метод Абеля — Пуассона суммирования рядов

Пусть имеется ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Составим новый ряд:

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n + \ldots \qquad (2)$$

(ряд (1) — частный случай ряда (2); он получается из ряда (2) при $r = 1$). Допустим, что:

1) ряд (2) сходится, когда $0 \le r < 1$, к сумме $S(r)$, и

2) существует конечный предел $S = \lim\limits_{r \to 1-0} S(r)$.

Тогда говорят, что ряд (1) *суммируется методом Абеля — Пуассона*, а число S называют его обобщенной суммой.

Теорема 1. Метод Абеля — Пуассона — перманентный.

▶ Пусть ряд (1) сходится (в обычном смысле) к сумме S. Тогда $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (как общий член сходящегося ряда). Мы знаем, что переменная, имеющая конечный предел, ограничена; значит, существует число $K > 0$, такое, что $|a_n| < K$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Но тогда ряд (2) мажорируется геометрическим рядом

$$K + K \cdot r + K \cdot r^2 + \ldots + K \cdot r^n + \ldots ,$$

сходящимся при $0 \le r < 1$. Тем самым ряд (2) сходится при $0 \le r < 1$. Пусть сумма ряда (2) есть $S(r)$. Положим $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= S_0, \\ a_1 &= S_1 - S_0, \\ a_2 &= S_2 - S_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= S_n - S_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(r) = S_0 + (S_1 - S_0)r + (S_2 - S_1)r^2 + \ldots + (S_n - S_{n-1})r^n + \ldots ,$$

или

$$S(r) = (S_0 - 0) + (S_1 r - S_0 r) + (S_2 r^2 - S_1 r^2) + \ldots + (S_n r^n - S_{n-1} r^n) + \ldots$$

Видим, что $S(r)$ можно рассматривать как результат формального вычитания ряда

$$0 + S_0 r + S_1 r^2 + \ldots + S_{n-1} r^n + \ldots \tag{3}$$

из ряда

$$S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \ldots + S_n r^n + \ldots \tag{4}$$

Отметим, что ряды (3) и (4) сходятся при $0 \le r < 1$. Действительно, у нас ряд (1) сходится в обычном смысле к сумме S. Значит, $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$ $\Rightarrow$ существует число M, такое, что будет $|S_n| < M$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, ряд (3) мажорируется рядом

$$Mr + Mr^2 + \ldots + Mr^n + \ldots , \tag{$\tilde{3}$}$$

а ряд (4) мажорируется рядом

$$M + Mr + Mr^2 + \ldots + Mr^n + \ldots \tag{$\tilde{4}$}$$

Ряды ($\tilde{3}$) и ($\tilde{4}$) — геометрические, сходящиеся при $0 \le r < 1$. Значит, и ряды (3), (4) сходятся при $0 \le r < 1$. Но тогда $S(r)$ равна разности сумм рядов (4) и (3), т. е.

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n - r\sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n \quad \Rightarrow \quad S(r) = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n .$$

Мы знаем, что если $0 \le r < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \Rightarrow \quad 1 = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \Rightarrow \quad S = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty} S \cdot r^n .$$

А тогда

$$S(r) - S = (1-r)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)\, r^n \quad \Rightarrow \quad |S(r) - S| < (1-r)\sum_{n=0}^{\infty}|S_n - S|\, r^n .$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Так как $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер m, такой, что как только $n > m$, так сейчас же $|S_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Закрепим это m. Тогда

$$|S(r) - S| < (1-r)\sum_{n=0}^{m}|S_n - S|\, r^n + (1-r)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2} r^n .$$

У нас $0 \le r < 1$. Следовательно, $\sum_{n=0}^{m} |S_n - S| r^n < \sum_{n=0}^{m} |S_n - S|$. Кроме того, $\sum_{n=m+1}^{\infty} r^n < \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. Значит, $|S(r) - S| < (1-r)\sum_{n=0}^{m} |S_n - S| + \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим для краткости $\sum_{n=0}^{m} |S_n - S| = A(\varepsilon)$ ($A(\varepsilon)$ — число, закрепленное вместе с ε, ибо m зависит от ε). Имеем, таким образом, $|S(r) - S| < (1-r)A(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$. До сих пор r было подчинено единственному условию: $0 \le r < 1$. Сделав r достаточно близким к 1, мы получим $(1-r)A(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ и тем самым $|S(r) - S| < \varepsilon$. Последнее означает, что $S(r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} S$. Значит, метод Абеля — Пуассона — перманентный. ◀

Рассмотрим ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{5}$$

Мы знаем, что этот ряд расходится в обычном смысле. Составим для него ряд:

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \ldots \tag{6}$$

Для $0 \le r < 1$: ряд (6) имеет своей суммой $S(r) = \frac{1}{1+r}$. Имеем $\lim_{r \to 1-0} S(r) = \lim_{r \to 1-0} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$.

Вывод: ряд (5) суммируется методом Абеля — Пуассона. Значит, метод Абеля — Пуассона интересный.

§6. Применение метода Абеля — Пуассона к рядам Фурье

Лемма 1. Если $0 \le r < 1$, то

$$\frac{1}{2} + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}. \tag{1}$$

▶ Ряд $\frac{1}{2} + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots$ сходится при наших r (он мажорируется геометрическим рядом, сходящимся при $0 \le r < 1$). Обозначим сумму этого ряда через S:

$$S = \frac{1}{2} + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots \tag{2}$$

Умножим обе части (2) на $2r\cos\alpha$. Получим

$$2r\cos\alpha \cdot S = r\cos\alpha + 2r^2\cos^2\alpha + 2r^3\cos\alpha\cos 2\alpha + \ldots$$

Но $2\cos A\cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$. Поэтому

$$2r\cos\alpha \cdot S = r\cos\alpha + r^2(1 + \cos 2\alpha) + r^3(\cos\alpha + \cos 3\alpha) + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r\cos\alpha \cdot S = r^2(1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots) +$$

$$+ (r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots).$$

Это преобразование законно, так как оба ряда в скобках сходятся для $0 \le r < 1$. Так как

$$(1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots) = \left(\frac{1}{2} + S\right),$$

$$(r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots) = \left(S - \frac{1}{2}\right),$$

то последнее соотношение может быть записано в виде

$$2r\cos\alpha \cdot S = r^2\left(\frac{1}{2} + S\right) + \left(S - \frac{1}{2}\right).$$

Получили уравнение относительно S:

$$\frac{1}{2}(1 - r^2) = S \cdot (1 - 2r\cos\alpha + r^2) \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}. \blacktriangleleft$$

Пусть функция $f(t) \in R_{2\pi}$. Составим для нее ряд Фурье:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{3}$$

Применим к этому ряду метод Абеля — Пуассона. Для этого составляем ряд

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

Покажем, что ряд (4) сходится при $0 \le r < 1$. У нас $f(t) \in R_{2\pi} \Rightarrow$ $f(t)$ — ограниченная. Значит, существует число $M > 0$, такое, что $|f(t)| \le M$. Имеем, далее

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right| \le 2M; \qquad |b_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right| \le 2M.$$

Поэтому $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le 4M$, и, следовательно, ряд (4) мажорируется рядом $A + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4Mr^n$, сходящимся при $0 \le r < 1$. Положим

$$S(x,r) = A + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (5)$$

Подставим в (5) вместо A, a_n, b_n их выражения:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Получим

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, r^n \cos n(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x)\right]dt.$$

Произведенное преобразование законно, потому что ряд в скобках (при закрепленном $0 < r < 1$) сходится равномерно относительно t и, следовательно, его можно почленно интегрировать, предварительно умножив на ограниченную функцию $f(t)$. По лемме,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}.$$

А тогда

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} f(t)\,dt. \qquad (6)$$

Правая часть (6) — *интеграл Пуассона.*

Теорема. Пусть $f(t) \in R_{2\pi}$. Образуем для нее $S(x,r)$. Тогда:

1) в каждой точке x, в которой функция $f(t)$ имеет разрыв первого рода, будет: $S(x,r) \xrightarrow[r\to 1-0]{} \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

2) в каждой точке x, в которой функция $f(t)$ непрерывна, будет: $S(x,r) \xrightarrow[r\to 1-0]{} f(x)$;

3) если $f(t)$ непрерывна на всей оси, то $S(x,r) \underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows} f(x)$.

▶ Для $S(x,r)$ было получено следующее выражение:

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt.$$

Положим здесь $t = x+u$. Будем иметь

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}du$$

(пределы интеграла прежние, ибо подынтегральная функция 2π-периодическая). Положим теперь $u = 2t_1$. Получим

$$S(x,r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}dt_1.$$

Интеграл, стоящий в правой части, представим в виде суммы двух интегралов:

$$S(x,r) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}dt_1.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену: $t_1 = -t_2$. Получим:

$$S(x,r) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x-2t_2)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_2+r^2}dt_2.$$

Последнее соотношение может быть записано в виде:

$$S(x,r) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t+r^2}dt \qquad (7)$$

(определенный интеграл не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования). Имеем: $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, а тогда

$$1 - 2r\cos 2t + r^2 = 1 - 2r(1 - 2\sin^2 t) + r^2 = (1 - r)^2 + 4r\sin^2 t.$$

Окончательно, для $S(x,r)$ будем иметь следующее выражение:

$$S(x,r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} [f(x + 2t) + f(x - 2t)]\frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r\sin^2 t}dt. \quad (8)$$

Итак, если $f(t) \in R_{2\pi}$, то построенная для нее сумма $S(x,r)$ выражается по формуле (8). В частности, это так, когда $f(t) \equiv 1$. Но для функции $f(t) \equiv 1$ будет: $S(x,r) = 1$ (ибо ряд Фурье этой функции такой: $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$). Значит, для $f(t) \equiv 1$ формула (8) принимает вид:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r\sin^2 t}dt. \quad (9)$$

Пусть теперь $f(t) \in R_{2\pi}$ и точка x — точка разрыва первого рода для этой функции. Умножим обе части (9) на $\dfrac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}$ и вычтем из (8) соответствующие части получившегося равенства. Будем иметь:

$$S(x,r) - \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{[f(x+2t) - f(x+0)] + [f(x-2t) - f(x-0)]\}\frac{1 - r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt. \quad (10)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По самому определению односторонних пределов, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $0 < t < \delta$, так сейчас же

$$|f(x + 2t) - f(x + 0)| + |f(x - 2t) - f(x - 0)| < \varepsilon.$$

Закрепим это δ (считая $\delta < \frac{\pi}{4}$) и разобьем интеграл формулы (10) на два интеграла по схеме: $\int\limits_0^{\pi/2} = \int\limits_0^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi/2}$. В первом из этих интегралов правой части будет:

$$|f(x+2t) - f(x+0)| + |f(x-2t) - f(x-0)| < \varepsilon, \qquad (11)$$

а во втором:

$$|f(x+2t) - f(x+0)| + |f(x-2t) - f(x-0)| \le 4M, \qquad (12)$$

где $M = \sup\{|f(t)|\}$ (по условию, функция $f(t)$ — интегрируемая, а значит, ограниченная).

(Заметим, что если, в частности, $f(t)$ — непрерывная на всей оси, то благодаря периодичности она и равномерно непрерывная, так что указанное выше $\delta > 0$ можно считать зависящим только от ε и не зависящим от x; оно одно и то же для всех вещественных x сразу.)

Из (10), принимая во внимание (11) и (12), находим:

$$\left| S(x,r) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt + \frac{4M}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt. \qquad (13)$$

Первый из интегралов правой части (13) только увеличится, если интегрировать от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (так как подынтегральная функция положительная). Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt < \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt.$$

Но из (9) следует, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2 t}\,dt < \frac{1}{2}$. Имеем, далее: при $t \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$

будет $\sin t \geq \sin\delta$, а потому $\int\limits_{\delta}^{\pi/2} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt < \frac{1-r^2}{4r\sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Теперь вместо неравенства (13) можем написать:

$$\left|S(x,r)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}.$$

Если $r\to 1-0$, то $\frac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}\to 0$. Значит, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $r_0>0$ такое, что как только $r_0<r<1$, так сейчас же $\frac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}<\frac{\varepsilon}{2}$, и тем самым $\left|S(x,r)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$. Этим доказано утверждение 1), а значит, и утверждение 2) теоремы.

Что касается утверждения 3) теоремы, то оно следует из того, что для всюду непрерывной и 2π-периодичной функции $f(t)$ число $\delta>0$, а с ним и r_0, зависят только от ε, но не от x.

Замечание. Пусть $f(t)$ задана только на промежутке $[-\pi,\pi]$, и $f(t)\in R([-\pi,\pi])$. Тогда:

1) если $-\pi<x<\pi$ и x — точка разрыва первого рода функции $f(t)$, то $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;

2) если $-\pi<x<\pi$ и x — точка непрерывности функции $f(t)$, то $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}f(x)$;

3) если существуют конечные $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$, то при $x=\pm\pi$ будет: $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$;

4) если $f(t)$ непрерывна на всем промежутке $[-\pi,\pi]$ и, кроме того, $f(-\pi)=f(\pi)$, то $S(x,r)\overset{\longrightarrow}{\underset{r\to 1-0}{\longrightarrow}}f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

▶ Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(t)$, определив ее на всей вещественной оси следующим образом:

$$g(t) = f(t)\,, \quad \text{если} \quad t \in [-\pi, \pi)\,,$$
$$\text{и} \quad g(t + 2\pi) \equiv g(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Заметим, что функция $g(t) \in R_{2\pi}$ и к ней применима вся предыдущая теория. Отметим, что ряд Фурье для функции $g(t)$ совпадает с рядом Фурье для функции $f(t)$ (это было показано раньше при доказательстве основной теоремы; см. гл. 15, §4). Совпадают также интегралы Пуассона $S(x,r)$ этих функций. А тогда:

1) если $x \in (-\pi, \pi)$ и x — точка разрыва первого рода функции $f(t)$ (а значит, и функции $g(t)$), то

$$S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}$$

$$\left[S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right];$$

2) если $x \in (-\pi, \pi)$ и x — точка непрерывности функции $f(t)$ (а значит, и функции $g(t)$), то

$$S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} g(x) \qquad \left[S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} f(x) \right];$$

3) если существуют конечные

$$f(-\pi + 0)\ [= g(-\pi + 0)], \quad f(\pi - 0)\ [= g(\pi - 0)],$$

то при $x = \pm\pi$ будет:

$$S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} \frac{g(-\pi+0) + g(\pi-0)}{2}$$

$$\left[S(x,r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \right];$$

4) если $f(t)$ непрерывна на всем промежутке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то $g(t)$ будет непрерывной на всей оси. Следовательно, $S(x,r) \underset{r \to 1-0}{\rightrightarrows} g(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, а значит, $S(x,r) \underset{r \to 1-0}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. ◀

Дополнение 1.
Применение метода Абеля — Пуассона в теории степенных и числовых рядов

В §6 показана эффективность применения метода Абеля — Пуассона в теории рядов Фурье. Отметим, что этот метод может быть успешно применен и при доказательствах некоторых теорем в теории степенных и даже числовых рядов.

Пример 1. Пусть степенной ряд

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots \tag{1}$$

имеет конечный радиус сходимости R. Тогда, как известно, сумма $f(x)$ ряда будет непрерывна всюду в промежутке $(-R, R)$ (это устанавливается совсем просто). Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно на каком-нибудь из концов интервала сходимости, то функция $f(x)$ будет определена и на этом конце.

Вопрос: будет ли $f(x)$ непрерывной в этой точке:

Ответ на этот вопрос дает **теорема Абеля.**

Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно при $x = R$, то в этой точке сумма ряда $f(x)$ непрерывна, т. е. $f(x) \xrightarrow[x \to R-0]{} f(R)$.

▶ По условию ряд $c_0 + c_1R + c_2R^2 + \ldots + c_nR^n + \ldots$ сходится к сумме $f(R)$. Мы знаем, что метод Абеля — Пуассона перманентный. Значит, указанный ряд суммируется этим методом к той же сумме $f(R)$, т. е.

$$c_0 + c_1R \cdot r + c_2R^2 \cdot r^2 + \ldots + c_nR^n \cdot r^n + \ldots \xrightarrow[r \to 1-0]{} f(R),$$

или $f(R \cdot r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} f(R)$. Остается заметить, что любое $x \in (0, R)$ можно записать в виде $x = R \cdot r$ и что соотношения: $x \to R - 0$ и $r \to 1 - 0$ совершенно равносильны (достаточно положить $r = \dfrac{x}{R}$).

Поэтому $f(x) \xrightarrow[x \to R-0]{} f(R)$, а это и требовалось доказать. ◀

Пример 2. **Теорема Абеля (об умножении рядов).** Пусть ряды:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

и

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{3}$$

сходятся (даже условно) к суммам A и B соответственно. Положим

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Если ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{4}$$

сходится к сумме C, то $C = AB$.

▶ Образуем степенные ряды:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5}$$

и

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots\ . \tag{6}$$

По условию, ряды (5) и (6) сходятся при $x = 1$. Значит, при $0 < x < 1$ они сходятся абсолютно и потому их можно перемножить. Ряд-произведение будет таким:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots\ . \tag{7}$$

Ряд (7) тоже сходится абсолютно при $0 < x < 1$, и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right), \quad x \in (0, 1). \tag{8}$$

Перейдем в соотношении (8) к пределу при $x \to 1 - 0$. По предыдущей теореме Абеля получим: $C = A \cdot B$, а это и требовалось доказать. ◀

Дополнение 2.
Гармонический анализ функций, заданных эмпирически

Выше было показано, что если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом $2l$ или если она задана на промежутке длины $2l$, то коэффициенты Фурье этой функции, попарно определяющие слагаемые гармоники в ее ряде Фурье, определяются по формулам:

$$\begin{gathered} A = \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx; \\ b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{1}$$

На практике, во многих прикладных вопросах функция $y = f(x)$ задается графически в виде некоторой кривой, аналитическое выражение которой неизвестно. Такие эмпирические кривые получаются обычно при помощи приборов, регистрирующих изменение какой-либо одной переменной величины в зависимости от изменения другой величины. (К таким приборам относится, например, осциллограф.)

Весьма часто также функция $y = f(x)$ задается табличным способом, т. е. некоторым конечным число своих частных значений, соответствующих различным значениям аргумента на протяжении целого периода. Эти частные значения функции являются результатом наблюдений и измерений рассматриваемой переменной величины.

Так как в этих случаях применение формул (1) становится невозможным, то вопрос о разложении функции $f(x)$ на простейшие гармоники ставится в несколько ином виде.

Пусть имеется некоторая $2l$-периодическая эмпирическая кривая. Разделим этот период на p равных частей. Пусть абсциссы точек деления будут:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{2l}{p} = \alpha;\ x_2 = 2\cdot\frac{2l}{p} = 2\alpha;\ \dots;$$

$$x_k = k\cdot\frac{2l}{p} = k\alpha;\ \dots;\ x_p = p\alpha = 2l,$$

а соответствующие ординаты пусть будут:

$$y_0;\ y_1;\ y_2;\ \dots;\ y_k;\ \dots;\ y_p (= y_0).$$

Возьмем теперь тригонометрический многочлен n-го порядка

$$\varphi(x) = \tilde{A} + \tilde{a}_1\cos\frac{\pi x}{l} + \tilde{a}_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \dots + \tilde{a}_n\cos\frac{n\pi x}{l} + $$
$$+ \tilde{b}_1\sin\frac{\pi x}{l} + \tilde{b}_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \dots + \tilde{b}_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2}$$

с числом членов, равным $2n + 1$, причем $2n < p$. Поставим задачу: определить такие значения коэффициентов $\tilde{A}$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, ..., $\tilde{a}_n$; $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, ..., $\tilde{b}_n$, при которых многочлен $\varphi(x)$ в точках деления наилучшим образом приближался бы к значениям ординат функции $f(x)$

в этих же точках. Другими словами, надо определить такие значения этих коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений тригонометрического многочлена (2) в точках деления от заданных ординат функции $y = f(x)$ в этих же точках была бы минимальной, т. е. чтобы сумма $\Delta_p = \sum_{k=1}^{p}[y_k - \varphi(x_k)]^2$ была бы наименьшей. Эта же задача ставится без изменений и для случая, когда функция $y = f(x)$ известна только своими частными значениями $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p$ соответственно в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Процесс определения коэффициентов тригонометрического многочлена (2), удовлетворяющих вышеупомянутым требованиям, называется *гармоническим анализом функций, заданных эмпирически.*

Для решения поставленной задачи берем частные производные от Δ_p по $\tilde{A}, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n; \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_n$ и приравниваем их нулю. В результате получаем следующую систему $(2n+1)$ уравнений со столькими же неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{p}[y_k - \varphi(x_k)] = 0, \text{ где } \varphi(x_k) = \tilde{A} + \sum_{m=1}^{n}\left(\tilde{a}_m \cos\frac{m\pi x_k}{l} + \tilde{b}_m \sin\frac{m\pi x_k}{l}\right); \\ \sum_{k=1}^{p}[y_k - \varphi(x_k)] \cdot \cos\frac{q\pi x_k}{l} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, n; \\ \sum_{k=1}^{p}[y_k - \varphi(x_k)] \cdot \sin\frac{q\pi x_k}{l} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Преобразуем уравнения системы (3), для чего выведем предварительно некоторые формулы.

I. Определим сначала значения сумм $\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}$ и $\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}$.

Для этого умножим вторую сумму на i и сложим с первой суммой. Будем иметь

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l} + i\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p} e^{i\frac{m\pi x_k}{l}} = \sum_{k=1}^{p} e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot k} =$$

$$= e^{i\frac{2m\pi}{p}} + e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot 2} + \ldots + e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot p} = e^{i\frac{2m\pi}{p}} \cdot \frac{e^{i\cdot 2m\pi} - 1}{e^{i\frac{2m\pi}{p}} - 1}.$$

У нас $m = 1,\ 2,\ \dots,\ n$; $2n < p$, а потому и $2m < p$. Следовательно, $e^{i\frac{2m\pi}{p}} \neq 1$. Так как $e^{i\cdot 2m\pi} = 1$, то

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l} + i\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l} = 0 \quad \Rightarrow \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l} = 0; \quad \sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l} = 0. \tag{5}$$

II. Определим теперь значения нижеследующих сумм:

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}; \quad \sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l};$$

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l},$$

где $m = 1, 2, \dots, n$; $q = 1, 2, \dots, n$. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m+q)\pi x_k}{l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m-q)\pi x_k}{l},$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m-q)\pi x_k}{l} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m+q)\pi x_k}{l}.$$

На основании (5) все суммы правых частей последних равенств при $m \neq q$ равны нулю, а при $q = m$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p}\cos^2\frac{m\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(1+\cos\frac{2m\pi x_k}{l}\right) =$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{2m\pi x_k}{l}}_{=0} = \frac{p}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p}\sin^2\frac{m\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(1-\cos\frac{2m\pi x_k}{l}\right) = \frac{p}{2}.$$

Имеем далее:

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{(m+q)\pi x_k}{l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{(q-m)\pi x_k}{l} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на основании (5) $\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}=0$ как при $q\neq m$, так и при $q=m$.

Перепишем систему (3) в виде:

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{p} y_k=\sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k),\\[2ex] \sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}=\sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l},\\[2ex] \sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}=\sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}.\end{cases}\qquad(6)$$

Имеем:

$$1)\ \sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)=\sum_{k=1}^{p}\left[\tilde{A}+\sum_{m=1}^{n}\left(\tilde{a}_m\cos\frac{m\pi x_k}{l}+\tilde{b}_m\sin\frac{m\pi x_k}{k}\right)\right]=$$

$$=\tilde{A}\cdot p+\sum_{m=1}^{n}\left(\tilde{a}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}}_{=0}+\tilde{b}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}}_{=0}\right)=\tilde{A}\cdot p;\qquad(7)$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)\cos\frac{q\pi x_k}{l}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\left[\tilde{A}+\sum_{m=1}^{n}\left(\tilde{a}_m\cos\frac{m\pi x_k}{l}+\tilde{b}_m\sin\frac{m\pi x_k}{l}\right)\right]\cos\frac{q\pi x_k}{l}=\tilde{A}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left(\tilde{a}_m\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cos\frac{q\pi x_k}{l}+\tilde{b}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cos\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\tilde{a}_m\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}=\frac{p}{2}\cdot\tilde{a}_q,\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n;\qquad(8)$$

3) $\sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)\sin\frac{q\pi x_k}{l}=$

$$=\sum_{k=1}^{p}\left[\widetilde{A}+\sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\cos\frac{m\pi x_k}{l}+\widetilde{b}_m\sin\frac{m\pi x_k}{k}\right)\right]\sin\frac{q\pi x_k}{l}=\widetilde{A}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\sin\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0}+\widetilde{b}_m\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\sin\frac{q\pi x_k}{l}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\widetilde{b}_m\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}=\frac{p}{2}\cdot\widetilde{b}_q,\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n. \qquad (9)$$

Поэтому будем иметь вместо (6)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}y_k=\widetilde{A}\cdot p,\\
&\sum_{k=1}^{p}y_k\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}=\widetilde{a}_q\cdot\frac{p}{2},\quad q=1,2,\dots,n,\\
&\sum_{k=1}^{p}y_k\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}=\widetilde{b}_q\cdot\frac{p}{2},\quad q=1,2,\dots,n
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}
&\widetilde{A}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}y_k,\\
&\widetilde{a}_q=\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}y_k\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l},\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n,\\
&\widetilde{b}_q=\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}y_k\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l},\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n.
\end{aligned}\right\}\qquad (10)$$

Так как $\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{q\pi}{l} \cdot k\frac{2l}{p} = q \cdot \frac{2\pi}{p} \cdot k$, то, положив $\frac{2\pi}{p} = \theta$, получим:

$$\widetilde{A} = \frac{1}{p}\left(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_p\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k,$$

$$\widetilde{a}_1 = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos\theta + y_2 \cos 2\theta + \ldots + y_p \cos p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos k\theta,$$

$$\widetilde{b}_1 = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin\theta + y_2 \sin 2\theta + \ldots + y_p \sin p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin k\theta,$$

$$\widetilde{a}_2 = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos 2\theta + y_2 \cos 4\theta + \ldots + y_p \cos 2p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos 2k\theta,$$

$$\widetilde{b}_2 = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin 2\theta + y_2 \sin 4\theta + \ldots + y_p \sin 2p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin 2k\theta,$$

....

$$\widetilde{a}_n = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos n\theta + y_2 \cos 2n\theta + \ldots + y_p \cos pn\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos kn\theta,$$

$$\widetilde{b}_n = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin n\theta + y_2 \sin 2n\theta + \ldots + y_p \sin pn\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin kn\theta.$$

Как обычно, синусоиду, определяемую суммой

$$\widetilde{a}_m \cos\frac{m\pi x}{l} + \widetilde{b}_m \sin\frac{m\pi x}{l} = r_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l} + \psi_m\right),$$

входящей в состав многочлена $\varphi(x)$, называют *гармоникой m-го порядка* функции $f(x)$, заданной эмпирически. Амплитуда r_m и начальная фаза ψ_m этой гармоники определяются равенствами

$$r_m = \sqrt{\widetilde{a}_m^2 + \widetilde{b}_m^2}; \quad \widetilde{a}_m = r_m \sin\psi_m; \quad \widetilde{b}_m = r_m \cos\psi_m.$$

Замечание. Существует большое количество весьма разнообразных методов разложения функций, заданных эмпирически, на составляющие гармоники. В большинстве своем они служат непосредственной цели определения коэффициентов $\widetilde{A}$, $\widetilde{a}_m$, $\widetilde{b}_m$. Найдя последние, уже затем определяют амплитуды и начальные фазы гармоник. Почти все эти методы допускают теоретически нахождение любого числа гармоник.

Глава 17

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Пусть (D) — некоторая область (плоская или пространственная). Если с каждой точкой $M \in (D)$ связано значение некоторой скалярной или векторной величины, то (D) называется *полем* этой величины.

§1. Скалярное поле

Пусть (D) — пространственное поле скалярной величины φ. Ясно, что $\varphi = \varphi(x,y,z)$, где $(x,y,z) \in (D)$ (функция $\varphi(x,y,z)$ предполагается однозначной).

I. Совокупность всех точек области (D), в которых функция φ имеет одно и то же значение C, называется *уровенной поверхностью* или *поверхностью уровня* данного скалярного поля. Соотношение

$$\varphi(x,y,z) = C \qquad (1)$$

— уравнение уровенной поверхности.

(В случае плоского скалярного поля вместо поверхностей уровня мы будем иметь *линии уровня*. Известные читателю изотермы, изобары, изоклины и т. д. являются примерами таких линий уровня.)

Отметим, что поверхности уровня, отвечающие различным значениям C, не могут пересекаться, т. е. через каждую точку области (D) проходит только одна поверхность уровня. В самом деле, если предположить, что поверхности уровня $\varphi(x,y,z) = C_1$ и $\varphi(x,y,z) = C_2$ ($C_1 \neq C_2$) имеют в (D) общую точку (x_0,y_0,z_0), то получим $\varphi(x_0,y_0,z_0)=C_1$, $\varphi(x_0,y_0,z_0)=C_2$. Но эти равенства противоречивы, ибо $C_1 \neq C_2$.

Придавая постоянной C в уравнении (1) различные значения, мы получим семейство поверхностей уровня.

Для изучения скалярных полей вводится понятие о производной по данному направлению.

II. Определение. Пусть (D) — поле скалярной величины φ. Возьмем в (D) фиксированную точку N и проведем через нее направленную прямую (l). (Направление на (l) может быть задано, например, ортом $\vec{l}_0=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$.) Возьмем на (l) какую-нибудь другую точку $M\in(D)$. Пусть $\rho=\text{вел}\ \overrightarrow{NM}$ (возможно $\rho \gtrless 0$).

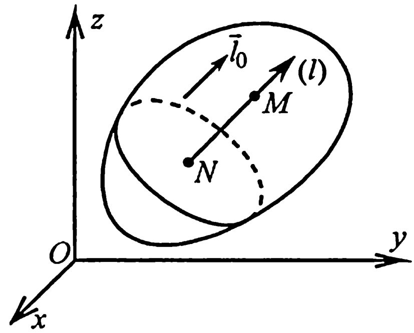


Рис. 17.1. К определению производной по направлению

Составим отношение $\dfrac{\varphi(M)-\varphi(N)}{\rho}$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(M)-\varphi(N)}{\rho}$$

(причем точка M не сходит с (l)), то этот предел называется *производной от функции* φ *по направлению* (l), вычисленной в точке N, и обозначается $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$. ($\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ характеризует скорость изменения величины φ в точке N в направлении (l)).

Теорема. Если функция $\varphi(x,y,z)$ имеет в области (D) непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, то для любой точки $N\in(D)$ и для любого направления (l) производная от функции φ по направлению (l) существует и выражается формулой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{2}$$

(здесь α, β, γ — углы, образованные направленной прямой (l) с осями координат; $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ вычислены в точке N).

▶ Пусть точка N имеет координаты (x,y,z). Очевидно, что точка M имеет тогда координаты $(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta,\ z+\rho\cos\gamma)$. По формуле для полного приращения функции будем иметь

$$\varphi(M)-\varphi(N)=\varphi(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta,\ z+\rho\cos\gamma)-\varphi(x,y,z)=$$
$$=\varphi'_x(x,y,z)\rho\cos\alpha+\varphi'_y(x,y,z)\rho\cos\beta+$$
$$+\varphi'_z(x,y,z)\rho\cos\gamma+\lambda\rho\cos\alpha+\mu\rho\cos\beta+\nu\rho\cos\gamma,$$

где $\lambda,\mu,\nu\to 0$ при $\rho\to 0$ $\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)$.

А тогда

$$\frac{\varphi(M)-\varphi(N)}{\rho}=\varphi'_x(x,y,z)\cos\alpha+\varphi'_y(x,y,z)\cos\beta+$$
$$+\varphi'_z(x,y,z)\cos\gamma+\lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\nu\cos\gamma \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(M)-\varphi(N)}{\rho}=$$
$$=\varphi'_x(x,y,z)\cos\alpha+\varphi'_y(x,y,z)\cos\beta+\varphi'_z(x,y,z)\cos\gamma.$$

Мы доказали, что существует $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\varphi(M)-\varphi(N)}{\rho}$ и показали, что он равен $\varphi'_x(x,y,z)\cos\alpha+\varphi'_y(x,y,z)\cos\beta+\varphi'_z(x,y,z)\cos\gamma$. Значит, теорема доказана. ◀

Если мы предположим, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ не обращаются одновременно в нуль в данной точке N и станем изменять направление (l), то естественно возникает следующая задача: для какого направления (l), исходящего из точки N, скорость возрастания функции φ (т. е. $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$) будет наибольшей?

▶ *Решение.* Введем в рассмотрение вектор

$$\vec{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \tag{3}$$

($\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ вычислены в точке N). Тогда производная от функции в точке N по направлению (l) выразится следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \underbrace{(\vec{G}\cdot\vec{l}_0)}_{\substack{\text{скалярное}\\ \text{произведение}}} = |\vec{G}|\cdot|\vec{l}_0|\cdot\cos\theta = |\vec{G}|\cdot 1\cdot\cos\theta.$$

Отсюда видим, что наибольшее значение $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ в точке N будем иметь тогда, когда $\cos\theta = 1$, т. е. когда $\theta = 0$. Следовательно, скорость возрастания функции φ в точке N будет наибольшей для того направления (l), которое совпадает с направлением вектора $\vec{G}$, причем эта наибольшая скорость возрастания функции φ в точке N равна

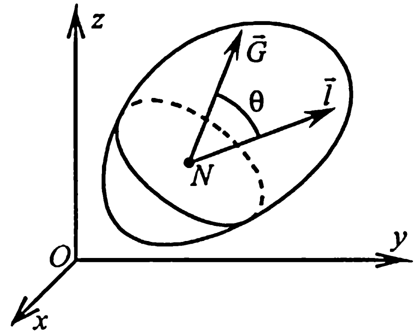


Рис. 17.2

$$|\vec{G}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,. \blacktriangleleft$$

§2. Градиент

Определение 1. *Градиентом* функции $\varphi(x,y,z)$ в точке $N \in (D)$ называется вектор, проекции которого на оси координат равны частным производным от функции φ по соответствующим координатам, вычисленным в точке N, т. е. вектор вида

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{1}$$

Видим, что введенный нами выше вектор $\vec{G}$ и есть градиент скалярного поля φ в его точке N.

Определение 2. *Градиентом* функции $\varphi(x,y,z)$ в точке $N \in (D)$ называется вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания φ в точке N и по длине равный этой наибольшей скорости возрастания функции φ в точке N.

Из определения 2 следует, что $\operatorname{grad}\varphi$ не зависит от выбора системы координат.

Установим связь между $\operatorname{grad}\varphi(N)$ и той (единственной) поверхностью уровня $\varphi(x,y,z) = \tilde{C}$, которая проходит через точку N. (При этом предполагаем существование непрерывных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ в (D), а также то, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ в точке N не обращаются одновременно в нуль.)

Запишем уравнение уровенной поверхности, проходящей через точку N в виде

$$\underbrace{\varphi(x,y,z) - \tilde{C}}_{=F(x,y,z)} = 0. \qquad (2)$$

Имеем $F'_x(N) = \varphi'_x(N)$; $F'_y(N) = \varphi'_y(N)$, $F'_z(N) = \varphi'_z(N)$. Так как F'_x, F'_y, F'_z в точке N не обращаются одновременно в нуль, то N — обыкновенная точка поверхности, определяемой уравнением (2). А тогда, как мы знаем, вектор

$$\left(F'_x(N), F'_y(N), F'_z(N)\right) = \left(\varphi'_x(N), \varphi'_y(N), \varphi'_z(N)\right)$$

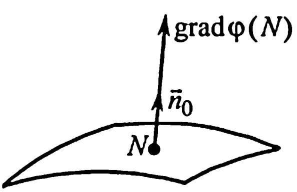


Рис. 17.3

направлен по нормали к поверхности (2) в точке N. Отсюда заключаем, что $\operatorname{grad}\varphi(N)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку N. (Причем $\operatorname{grad}\varphi(N)$ направлен в сторону возрастания функции φ.)

Прежде чем перейти к выводу формул, облегчающих вычисление градиента, отметим выражение $\operatorname{grad}\varphi$ через так называемый символический вектор или оператор Гамильтона. Именно, если ввести в рассмотрение следующий дифференциально-векторный оператор ∇ (читается "набла"):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}, \qquad (3)$$

то градиент функции φ можно рассматривать формально как произведение "вектора" набла на скаляр φ:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (4)$$

Основные формулы для вычисления градиента.

1. $\operatorname{grad} C = 0$ (C — постоянная скалярная величина).
2. $\operatorname{grad} x = \vec{i}$, $\operatorname{grad} y = \vec{j}$, $\operatorname{grad} z = \vec{k}$.
3. $\operatorname{grad}(C\cdot\varphi) = C\operatorname{grad}\varphi$ (C — постоянная скалярная величина).
4. $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi$.

Из формул 3 и 4 видно, что градиент есть линейный оператор, преобразующий скалярную величину в векторную.

5. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$.
6. $\operatorname{grad}\dfrac{\varphi}{\psi} = \dfrac{\psi\operatorname{grad}\varphi - \varphi\operatorname{grad}\psi}{\psi^2}$.
7. Градиент сложных функций:

а) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$;

б) $\operatorname{grad} f(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v$, и т. д.

8. Пусть $u = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Здесь поверхности уровня — сферы с центром в точке $O(0, 0, 0)$. Имеем

$$u'_x = \varphi'(r)\cdot r'_x = \varphi'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \varphi'(r)\frac{x}{r}.$$

Аналогично: $u'_y = \varphi'(r)\dfrac{y}{r}$, $u'_z = \varphi'(r)\dfrac{z}{r}$. А тогда

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r} = \varphi'(r)\cdot\vec{r}_0.$$

Замечание. Сходство оператора $\operatorname{grad}\varphi$ с обычным оператором дифференцирования станет еще заметнее, если формулы для вычисления градиента записывать с помощью знака "набла".

Например, формула 5 запишется так: $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$, а формула 6 — $\nabla\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right) = \dfrac{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi}{\psi^2}$, и т. д.

§3. Векторное поле

Пусть (D) — пространственное поле векторной величины $\vec{a}(N)$. Относя область (D) и векторы $\vec{a}(N)$ к некоторой декартовой системе координат, мы увидим, что задание векторной функции $\vec{a}(N)$ в трехмерной области (D) равносильно заданию трех скалярных функций точки:

$$\vec{a}(N) = a_x(N)\vec{i} + a_y(N)\vec{j} + a_z(N)\vec{k}, \tag{1}$$

или

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}. \tag{$\tilde{1}$}$$

(Таким образом, задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных полей.)

Замечание. Векторное поле называется *плоским*, если область (D) плоская и если вектор $\vec{a}$ лежит в той же плоскости (см. рис. 17.4). В этом случае

$$\vec{a} = \vec{a}(x,y) = a_x(x,y)\vec{i} + a_y(x,y)\vec{j}.$$

Важным средством для изучения векторного поля является понятие векторных линий поля.

Определение. Пусть (D) — поле вектора $\vec{a}(N)$. Если (L) есть линия, лежащая в (D) и такая, что в каждой своей точке она

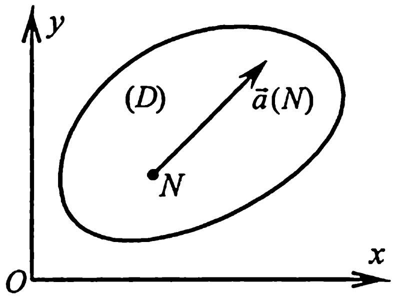


Рис. 17.4

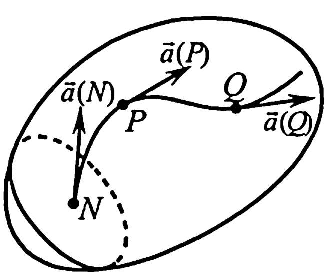


Рис. 17.5

касается соответствующего вектора поля, то (L) называется векторной линией этого векторного поля (см. рис. 17.5). Пусть

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ — параметрические уравнения одной из векторных линий данного векторного поля. Тогда, как известно, вектор $\vec{\tau}$ с проекциями x'_t, y'_t, z'_t направлен по касательной к этой линии в рассматриваемой точке N, а следовательно, будет коллинеарен с вектором $\vec{a}(N)$. Поэтому проекции этих двух векторов $\vec{\tau}(N)$ и $\vec{a}(N)$ будут пропорциональны:

$$\frac{x'_t}{a_x} = \frac{y'_t}{a_y} = \frac{z'_t}{a_z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

или в более подробной записи:

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}. \tag{2}$$

Полученные уравнения (2) называются *дифференциальными уравнениями векторных линий.* Переписав эти уравнения в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y(x,y,z)}{a_x(x,y,z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_z(x,y,z)}{a_x(x,y,z)}, \tag{3}$$

получаем нормальную систему дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $y(x)$ и $z(x)$.

В случае плоского векторного поля $\vec{a}(x,y)$ система (2) сведется к одному уравнению:

$$\frac{dx}{a_x(x,y)} = \frac{dy}{a_y(x,y)} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{a_y(x,y)}{a_x(x,y)}. \tag{4}$$

Интегральные кривые этого уравнения и будут векторными линиями данного плоского векторного поля.

Задача. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$, заданного в любой области (D), не содержащей начало координат.

Решение. Составляем дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy},$$

или $y'_x = \dfrac{x}{y}$, $z'_x = \dfrac{x}{z}$. Видим, что система (3) в данном случае распадается на два отдельных уравнения, содержащих каждое только одну неизвестную функцию. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$x^2 - y^2 = C_1, \quad x^2 - z^2 = C_2.$$

Линии пересечения этих гиперболических цилиндров и будут векторными линиями данного векторного поля.

В дальнейшем, для большей наглядности рассуждений, мы будем придавать вектору $\vec{a}(x,y,z)$ некоторый условный физический смысл, а именно, вектор $\vec{a}(N)$ будем истолковывать как скорость $\vec{v}(N)$ установившегося течения фиктивной жидкости. (Движение жидкости называется установившимся, если скорость $\vec{v}(N)$ не зависит от времени.) Жидкость мы будем предполагать несжимаемой, т. е. имеющей постоянную плотность, которую будем считать равной единице. Пользуясь такой "гидромеханической" моделью векторного поля, рассмотрим следующую задачу (она приведет нас к важному понятию потока векторного поля).

Задача I. Пусть (D) — поле вектора $\vec{a}(N)$, $N \in (D)$. Пусть в (D) расположена гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя незамкнутая поверхность (S). Рассматривая вектор $\vec{a}$ как скорость $\vec{v}$ движения частицы жидкости, определить количество жидкости, протекающей за одну секунду через данную поверхность (S).

Решение. Разобьем поверхность (S) на столь малые части (ΔS_k) $(k = \overline{1, n})$, чтобы каждую такую часть можно было считать приблизительно плоской, а вектор $\vec{a}$ для всех точек этой части приблизительно постоянным по величине и направлению.

Частица жидкости, которая в данный момент находилась в точке N_k части (ΔS_k), переместится за одну секунду в конец вектора $\vec{a}(N_k)$ (см. рис. 17.6). Поэтому количество жидкости, протекшей за одну секунду через площадку (ΔS_k) будет равно приближенно объему наклонного цилиндра с образующей, изображаемой вектором $\vec{a}(N_k)$, и с основанием (ΔS_k). Высота h этого цилиндра будет равна проекции вектора $\vec{a}(N_k)$ на нормаль к поверхности (S) в точке N_k, т. е. равна $\vec{a}(N_k) \cdot \vec{n}_0(N_k) = a_n(N_k)$. Значит, количество жидкости, протекшей за одну секунду через площадку (ΔS_k), будет равно приближенно $a_n(N_k)\cdot\Delta S_k$ (здесь ΔS_k — площадь (ΔS_k)). А тогда количество P жидкости, протекшей через всю поверхность (S) за одну секунду, будет приближенно равно

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} a_n(N_k)\cdot\Delta S_k.$$

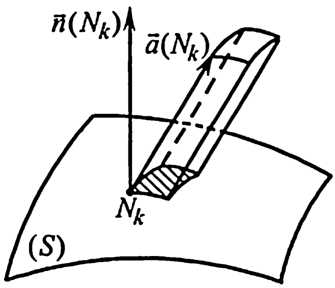


Рис. 17.6. К определению потока векторного поля

Точное выражение для количества P жидкости, протекшей за одну секунду через всю поверхность (S), получим переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$ (λ — наибольший из диаметров частей (ΔS_k)). Будем иметь

$$P = \iint\limits_{(S)} a_n dS = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS\,.$$

Этот ответ приводит нас к понятию потока векторного поля.

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через незамкнутую поверхность (S) (с выбранным направлением нормали $\vec{n}$) называется поверхностный интеграл вида

$$P = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS. \tag{5}$$

Если вектор $\vec{a}$ и орт нормали $\vec{n}_0$ разложены по координатным ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($\vec{n}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$), то

$$P = \iint\limits_{(S)} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS. \tag{6}$$

Задача II. Рассматривая вектор $\vec{a}$ как скорость $\vec{v}$ движения частицы жидкости, выяснить, какой смысл имеет поверхностный интеграл $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$, если (S) — замкнутая поверхность, лежащая в (D), а $\vec{n}_0$ — орт внешней нормали к (S).

Решение. Разобьем поверхность (S) на части (S_1) и (S_2); поверхность (S_1) есть совокупность тех точек поверхности (S), в которых внешняя нормаль к (S) образует острый угол с соот-

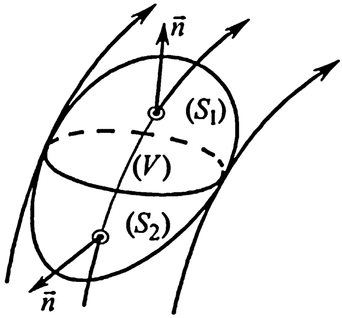


Рис. 17.7. К выяснению смысла $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$, где (S) — замкнутая поверхность

ветствующим вектором поля $\vec{a}(N)$, а поверхность (S_2) есть совокупность тех точек поверхности (S), в которых внешняя нормаль к (S) образует тупой угол с вектором поля $\vec{a}(N)$. Тогда интеграл $\iint\limits_{(S_1)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$ есть количество P_1 жидкости, протекшей за одну секунду (в смысле задачи I) через поверхность (S_1), а $\iint\limits_{(S_2)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$ есть взятое со знаком минус количество P_2 жидкости, протекшей за одну секунду через поверхность (S_2). Так как

$$\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS=\iint\limits_{(S_1)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS+\iint\limits_{(S_2)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS=P_1-P_2,$$

то мы получаем, что поверхностный интеграл $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$ представляет собой количество жидкости, вытекшей за одну секунду из объема (V), ограниченного поверхностью (S).

Если известно, что внутри замкнутой поверхности (S) нет точек, в которых жидкость создается или поглощается, то поверхностный интеграл $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS=0$, ибо в этом случае $P_1=P_2$.

Если $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS>0$, то это означает, что внутри замкнутой поверхности (S) заведомо есть такие точки, где жидкость создается, ибо в этом случае $P_1>P_2$. Такие точки называются *источниками*.

Если $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS<0$, то внутри замкнутой поверхности (S) заведомо есть такие точки, где жидкость поглощается (исчезает). Такие точки называются *стоками*.

Определение. Если (S) — замкнутая поверхность, ограничивающая объем (V), а $\vec{n}_0$ — орт внешней нормали к (S), то $\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS$ называется *обильностью* или *производительностью* векторного поля $\vec{a}$ в объеме (V).

§4. Дивергенция

Пусть (S) — замкнутая поверхность, ограничивающая тело (V) с объемом V, $\vec{n}_0$ — орт внешней нормали к (S). Отношение $\dfrac{\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS}{V}$ можно рассматривать как среднюю объемную плотность потока векторного поля через замкнутую поверхность (S) (или как среднюю плотность источников и стоков, распределенных в теле (V); говорят также о средней производительности этих источников и стоков).

Станем стягивать поверхность (S) к некоторой фиксированной точке N, лежащей внутри (S) (выражение "поверхность (S) стягивается к точке N означает, что точка N находится внутри (S) и что диаметр (S) стремится к нулю). Если при этом существует конечный предел

$$\lim_{(S)\to N}\frac{\oiint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS}{V}, \qquad (1)$$

то этот предел называется *дивергенцией* векторного поля $\vec{a}$ в точке N и обозначается $\operatorname{div}\vec{a}(N)$. Очевидно, что $\operatorname{div}\vec{a}(N)$ можно рассматривать как объемную плотность потока векторного поля $\vec{a}$ в точке N. Из определения дивергенции ясно, что $\operatorname{div}\vec{a}(N)$ не зависит от выбора системы координат.

Отметим, что $\operatorname{div}\vec{a}(N)$ характеризует векторное поле уже в самой точке N, а именно:

1) если $\operatorname{div}\vec{a}(N)>0$, то в точке N имеется источник;
2) если $\operatorname{div}\vec{a}(N)<0$, то в точке N имеется сток;
3) если $\operatorname{div}\vec{a}(N)=0$, то в точке N нет ни источника, ни стока.

Вопрос о существовании и вычислении дивергенции решается следующей теоремой.

Теорема. Если проекции a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ непрерывны в области (D) и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\frac{\partial a_z}{\partial z}$, то для любой точки области (D) $\operatorname{div}\vec{a}$ существует и выражается формулой

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{2}$$

▶ Пусть точка N — любая точка из области (D). По определению $\operatorname{div}\vec{a}(N)$ имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}(N) = \lim_{(S)\to N} \frac{\oiint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS}{V}.$$

Пусть $\vec{n}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$. Тогда

$$\oiint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS = \oiint\limits_{(S)} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ применив формулу Остроградского, получаем

$$\oiint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(M)\,dV$$

(ради краткости мы обозначили подынтегральную функцию через $f(M)$). Так как $f(M)$ непрерывна в области (V), то, применяя к тройному интегралу частный случай теоремы о среднем, получим

$$\iiint\limits_{(V)} f(M)\,dV = f(\tilde{M})\cdot V,$$

где $\tilde{M}$ есть некоторая точка, лежащая внутри (V). Отметим, что если $(S)\to N$, то точка $\tilde{M}$ стремится к точке N. Поэтому

$$\operatorname{div}\vec{a}(N) = \lim_{(S)\to N} \frac{f(\tilde{M})\cdot V}{V} = \lim_{\tilde{M}\to N} f(\tilde{M}) = f(N)$$

(здесь мы опять воспользовались непрерывностью функции f). Так как $f(N)=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Bigg|_N$, то получаем

$$\operatorname{div}\vec{a}(N)=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Bigg|_N . \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Из способа доказательства теоремы следует, что с помощью понятия дивергенции формула Остроградского может быть записана в виде $\oint\!\!\oint_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS=\iiint_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV$.

Таким образом, получается следующая векторная формулировка теоремы Остроградского (мы даем ее в сокращенном виде, не повторяя условий теоремы).

Поток вектора через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции вектора, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.

Замечание 2. Если ввести в рассмотрение символический вектор Гамильтона $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, то $\operatorname{div}\vec{a}$ можно рассматривать как скалярное произведение векторов ∇ и $\vec{a}$. Действительно, имеем

$$(\nabla\cdot\vec{a})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{a}.$$

Основные формулы для вычисления дивергенции.

1. $\operatorname{div}\vec{C}=0$ ($\vec{C}$ — постоянный вектор).

2. $\operatorname{div}C\cdot\vec{a}=C\operatorname{div}\vec{a}$ (C — постоянная скалярная величина).

3. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$.

Из формул 2 и 3 видно, что дивергенция есть линейный оператор, преобразующий векторную величину в скалярную.

4. $\operatorname{div}(\varphi\cdot\vec{a})=\varphi\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{a}$ (или в другой записи: $\nabla(\varphi\cdot\vec{a})=\varphi\cdot\nabla\vec{a}+\nabla\varphi\cdot\vec{a}$).

Докажем, например, формулу 4. Обозначим

$$\varphi \cdot \vec{a} = \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \underbrace{\varphi a_x}_{=A_x}\vec{i} + \underbrace{\varphi a_y}_{=A_y}\vec{j} + \underbrace{\varphi a_z}_{=A_z}\vec{k}.$$

Имеем

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \cdot a_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi \cdot a_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi \cdot a_z) =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot a_z =$$

$$= \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{a}.$$

§5. Линейный интеграл векторной функции

Пусть в поле (D) вектора $\vec{a}$ лежит направленная кривая (l) (кривая (AB)). Эту кривую (AB) будем рассматривать как годограф некоторой векторной функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [t_0, T]$. *Годографом* векторной функции $\vec{r}(t)$ называется кривая, описываемая концом вектора $\vec{r}(t)$, начало которого находится в точке $O(0, 0, 0)$, при изменении аргумента t от t_0 до T.

Выберем на (AB) определенное направление, например, от точки A к точке B, и проделаем следующие операции.

1) Дробим (AB) точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ на n дуг $\smile A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Точки $A_k(x_k, y_k, z_k)$ следуют друг за другом в направлении от точки A к точке B. Пусть d_k — диаметр $\smile A_k A_{k+1}$ а $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}}\{d_k\}$.

2) На каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку M_k и находим $\vec{a}(M_k)$.

3) Умножаем скалярно вектор $\vec{a}(M_k)$ на вектор $\Delta \vec{r}_k = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k$. Получаем

$$\vec{a}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k.$$

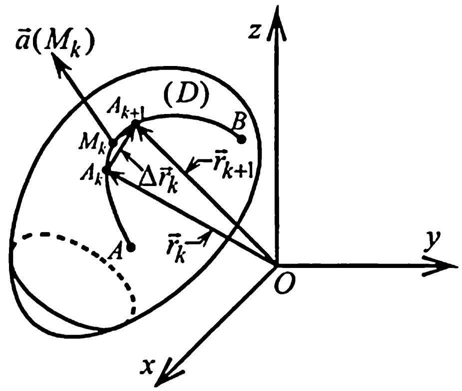


Рис. 17.8. К определению линейного интеграла

4) Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{a}(M_k) \cdot \Delta \vec{r}_k .$$

5) Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$.

Если при этом существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа дробления кривой (AB) на части $\smile A_k A_{k+1}$, ни от выбора точки M_k на каждой части, то предел I называется *линейным интегралом* от вектора $\vec{a}$ по кривой (AB) и обозначается

$$\int\limits_{(AB)} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad \int\limits_{(l)} \vec{a} \cdot d\vec{r}. \tag{1}$$

Если кривая (l) замкнутая, то линейный интеграл обозначается символом

$$\oint\limits_{(l)} \vec{a} \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

и называется *циркуляцией* вектора $\vec{a}$ по кривой (l).

Так как

$$\vec{a}(M_k) = a_x(M_k)\vec{i} + a_y(M_k)\vec{j} + a_z(M_k)\vec{k},$$
$$\Delta\vec{r}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j} + \Delta z_k \vec{k} ,$$

то

$$\vec{a}(M_k)\cdot\Delta\vec{r}_k = a_x(M_k)\Delta x_k + a_y(M_k)\Delta y_k + a_z(M_k)\Delta z_k.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec{a}(M_k)\cdot\Delta\vec{r}_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left[a_x(M_k)\Delta x_k + a_y(M_k)\Delta y_k + a_z(M_k)\Delta z_k\right].$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda\to 0$, получаем

$$\int_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{(l)} a_x dx + a_y dy + a_z dz. \qquad (3)$$

Так линейный интеграл от вектора $\vec{a}$ по кривой (l) выражается через криволинейный интеграл второго рода. Отсюда, в частности, следует, что линейный интеграл $\int\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}$ существует, если (l) — кусочно-гладкая кривая и проекции a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ непрерывны на (l).

§6. Вихрь векторного поля

Введем понятие плоскостной плотности циркуляции. (Это понятие аналогично понятию объемной плотности потока векторного поля.) Для этого через фиксированную точку N области (D) проведем некоторую плоскость (Q). Положение плоскости (Q) можно характеризовать ортом нормали к ней:

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}.$$

На плоскости (Q) возьмем замкнутый контур (l), охватывающий точку N; направление на контуре (l) согласуем с направлением нормали $\vec{n}_0$ так же, как это делается в теореме Стокса. Выражение

$\dfrac{\oint\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}}{S}$, где S — площадь фигуры (S), ограниченной кривой (l),

естественно назвать средней плотностью циркуляции по плоскому контуру (l). Станем теперь (сохраняя орт $\vec{n}_0$ неизменным) стягивать область (S) по всем направлениям к точке N. Если при этом

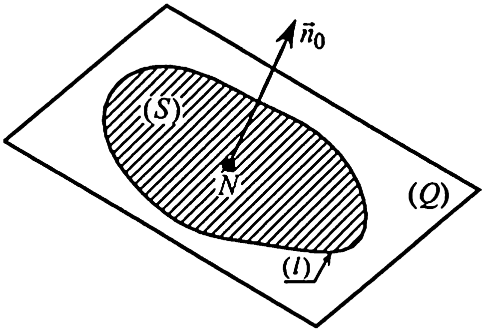


Рис. 17.9. К определению плоскостной плотности циркуляции

существует конечный предел $\lim\limits_{(S)\to N}\dfrac{\oint\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}}{S}$, то он называется *плоскостной плотностью циркуляции* (для данной плоскости (Q)) в точке N. Плоскостную плотность циркуляции будем обозначать через $\mu(N,\vec{n}_0)$, так что

$$\mu(N,\vec{n}_0)=\lim_{(S)\to N}\frac{\oint\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}}{S}. \qquad (1)$$

Найдем выражение для плоскостной плотности циркуляции в любой точке N области (D) и для любой плоскости (Q), предполагая, что проекции a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ и их частные производные $\dfrac{\partial a_x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial z}$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial z}$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial y}$ непрерывны в области (D). Имеем $\oint\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_{(l)}a_x dx+a_y dy+a_z dz$. Применяя формулу Стокса, получим

$$\oint\limits_{(l)}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}dS=\iint\limits_{(S)}f(M)\,dS$$

(ради краткости мы обозначили подынтегральную функцию через $f(M)$). Так как $f(M)$ непрерывна на (S), то, применяя к поверхностному интегралу частный случай теоремы о среднем, получим

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\,dS = f(\tilde{M})\cdot S,$$

где $\tilde{M}$ есть некоторая точка, лежащая на (S). Отметим, что если $(S)\to N$, то точка $\tilde{M}$ стремится к точке N. Поэтому

$$\mu(N,\vec{n}_0) = \lim_{(S)\to N}\frac{f(\tilde{M})\cdot S}{S} = \lim_{\tilde{M}\to N} f(\tilde{M}) = f(N)$$

(здесь мы опять воспользовались непрерывностью функции f). Таким образом, окончательно получаем

$$\mu(N,\vec{n}_0) = f(N) = \left.\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}\right|_{(\bullet)N},$$

или

$$\mu(N,\vec{n}_0) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \\ +\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma. \qquad (2)$$

Если выражения, стоящие в скобках в формуле (2), не равны одновременно нулю, то (как раньше для производной по направлению $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$) естественно возникает следующая ***задача***:

Для какого направления нормали $\vec{n}_0$, т. е. для какого положения плоскости (Q), проходящей через точку N, плоскостная плотность циркуляции векторного поля в точке N: $\mu(N,\vec{n}_0)$ имеет наибольшее значение?

Решение. Введем в рассмотрение следующий вектор:

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}, \qquad (3)$$

или, в символической записи, $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$. (Очевидно, что $\vec{w}$ не зависит от направления нормали $\vec{n}_0$.) Тогда плоскостная плотность циркуляции $\mu(N,\vec{n}_0)$ выражается следующим образом:

$$\mu(N,\vec{n}_0) = (\vec{w}\cdot\vec{n}_0) = |\vec{w}|\cdot\underbrace{|\vec{n}_0|}_{=1}\cdot\cos\theta = |\vec{w}|\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами $\vec{w}$ и $\vec{n}_0$ (см. рис. 17.10). Отсюда видим, что $\mu(N,\vec{n}_0)$ имеет наибольшее значение для той из плоскостей, проходящих через точку N, у которой направление нормали $\vec{n}_0$ совпадает с направлением вектора $\vec{w}$, причем это наибольшее значение $\mu(N,\vec{n}_0)$ равно как раз длине вектора $\vec{w}$, т. е. наибольшее значение $\mu(N,\vec{n}_0) = |\vec{w}|$. Этот вектор $\vec{w}$ называется *вихрем*, или *ротором*, векторного поля $\vec{a}$ в точке N и обозначается $\operatorname{rot}\vec{a}$. Дадим более детальные определения.

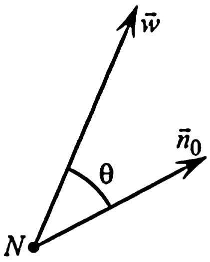


Рис. 17.10. К определению вихря

Определение 1. *Вихрем* векторного поля $\vec{a}$ в точке $N \in (D)$ называется вектор следующего вида:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}\right|_{(\bullet)N}. \qquad (4)$$

Определение 2. *Вихрем* векторного поля $\vec{a}$ в точке $N \in (D)$ называется вектор, который направлен так, что для перпендикулярной к нему плоскости, проходящей через точку N, плотность циркуляции в точке N будет наибольшей, а по длине — равный этой наибольшей плотности циркуляции.

Из определения 2 следует, что вихрь векторного поля не зависит от выбора координатной системы.

Замечание 1. Из приведенного выше способа вывода формулы для $\mu(N,\vec{n}_0)$ следует, что $(\vec{w}\cdot\vec{n}_0) = (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}_0)$, а поэтому формула Стокса может быть записана в виде

$$\oint\limits_{(l)} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{(S)} (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}_0)\,dS. \tag{5}$$

Таким образом, мы получаем следующую векторную формулировку теоремы Стокса (мы даем ее в сокращенном виде, не формулируя условий).

Циркуляция вектора $\vec{a}$ по контуру (l) равна потоку вихря этого вектора через любую незамкнутую поверхность (S), натянутую на контур (l).

Замечание 2. Если ввести в рассмотрение символический вектор Гамильтона $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, то $\operatorname{rot}\vec{a}$ можно рассматривать (формально) как векторное произведение вектора ∇ и вектора $\vec{a}$. Действительно, имеем

$$(\nabla\times\vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Основные формулы для вычисления вихря.

1. $\operatorname{rot}\vec{C} = \vec{0}$ ($\vec{C}$ — постоянный вектор).
2. $\operatorname{rot} C\cdot\vec{a} = C\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$ (C — постоянный скаляр).
3. $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}$.

Из формул 2 и 3 заключаем, что вихрь есть линейный оператор, преобразующий данный вектор $\vec{a}$ в некоторый другой вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$.

4. $\operatorname{rot}(\varphi\cdot\vec{a}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}$ (или, в другой записи,

$$\nabla\times(\varphi\vec{a}) = \varphi(\nabla\times\vec{a}) + \nabla\varphi\times\vec{a}).$$

Докажем, например, формулу 4.

▶ Имеем

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_x & \varphi a_y & \varphi a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \varphi\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}a_y\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}a_z\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}a_x\right)\vec{k}\right] =$$

$$= \varphi \cdot \operatorname{rot}\vec{a} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \varphi \cdot \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}.$$

§7 Дифференциальные операции второго порядка в векторном анализе

Операции градиент, дивергенция и вихрь называются дифференциальными операциями первого порядка в векторном анализе. Применяя эти операции повторно, мы получим так называемые операции второго порядка (все эти операции, конечно, линейные и не зависят от выбора системы координат). Формально можно представить себе девять операций второго порядка, а именно:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\varphi)}, & \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}), & \cancel{\operatorname{grad}(\operatorname{rot}\vec{a})}, \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi), & \cancel{\operatorname{div}(\operatorname{div}\vec{a})}, & \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}), \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi), & \cancel{\operatorname{rot}(\operatorname{div}\vec{a})}, & \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}). \end{array}$$

Из них зачеркнутые, очевидно, не имеют смысла. Все же остальные операции используются в векторном анализе и его приложениях. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функция $\varphi(x,y,z)$ и проекции $a_x(x,y,z)$, $a_y(x,y,z)$, $a_z(x,y,z)$ вектора $\vec{a}(x,y,z)$ непрерывны в области (D) и имеют там непрерывные частные производные по всем аргументам до второго порядка включительно.

I. Рассмотрим операцию $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$. Покажем, что всюду в (D): $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$, т. е. что вихревое поле не имеет ни источников, ни стоков.

▶ Положим $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{A}$ (это — обозначение). Имеем

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)}_{=A_x}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)}_{=A_y}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)}_{=A_z}\vec{k};$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y}\right).$$

Так как, по условию, смешанные частные производные непрерывны в (D), то

$$\frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}$$

всюду в (D). Следовательно, будем иметь $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$ всюду в (D). ◀

II. Рассмотрим операцию $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$. Покажем, что всюду в (D): $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \vec{0}$.

▶ Положим $\operatorname{grad}\varphi = \vec{A}$ (это — обозначение). Имеем

$$\vec{A} = \operatorname{grad}\varphi = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{=A_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{=A_y}\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}_{=A_z}\vec{k};$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right)}_{\equiv 0 \text{ в } (D)}\vec{i}+\underbrace{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)}_{\equiv 0 \text{ в } (D)}\vec{j}+\underbrace{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)}_{\equiv 0 \text{ в } (D)}\vec{k}\equiv\vec{0} \text{ в } (D),$$

ибо, по условию, смешанные частные производные от функции φ непрерывные в (D), и, следовательно,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad \text{в } (D). ◀$$

III. Рассмотрим операцию $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$. Положим $\operatorname{grad}\varphi=\vec{A}$ (это — обозначение). Имеем

$$\vec{A}=\operatorname{grad}\varphi=\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}_{=A_x}\vec{i}+\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{=A_y}\vec{j}+\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{=A_z}\vec{k};$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Рассматриваемый оператор называется также *лапласианом* скалярной функции φ и обозначается символом $\Delta\varphi$, так что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

IV. Рассмотрим теперь операции $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$. При вычислении $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ мы не получим каких-либо простых выражений (как в предыдущих случаях). Операция $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ связана, как будет показано ниже, с операцией $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

Предварительно введем понятие о лапласиане векторной функции.

Определение. *Лапласианом* векторной функции $\vec{a}(x,y,z)$ называют следующее выражение: $\Delta\vec{a}=\dfrac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2}$.

Так как $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, то

$$\Delta\vec{a}=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}\vec{k}\right)+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}\vec{k}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\vec{k}\right)=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}=$$

$$=\Delta a_x\vec{i}+\Delta a_y\vec{j}+\Delta a_z\vec{k},$$

т. е. лапласиан от векторной функции $\vec{a}(x,y,z)$ есть такой вектор, проекции которого на оси координат равны лапласианам от соответствующих проекций данного вектора.

Покажем, что операция $\Delta\vec{a}$, ставящая в соответствие вектору $\vec{a}$ некоторый вектор $\Delta\vec{a}$, позволяет связать операции $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$ следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})-\Delta\vec{a}.$$

▶ Положим $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{A}$ (это — обозначение). Имеем

$$\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)}_{=A_x}\vec{i}+\underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)}_{=A_y}\vec{j}+\underbrace{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)}_{=A_z}\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})=\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)}_{=\text{пр}_x\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})}\vec{i}+\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{=\text{пр}_y\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})}\vec{j}+\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{=\text{пр}_z\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})}\vec{k}.$$

Имеем

$$\text{пр}_x \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \Delta a_x = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta a_x .$$

Таким образом, получили

$$\text{пр}_x \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta a_x . \tag{1}$$

Совершенно аналогично находим далее, что

$$\text{пр}_y \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta a_y , \tag{2}$$

$$\text{пр}_z \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta a_z . \tag{3}$$

Умножая обе части равенства (1) на $\vec{i}$, обе части равенства (2) на $\vec{j}$, а обе части равенства (3) на $\vec{k}$ и складывая соответствующие части получаемых соотношений, будем иметь

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a} . \blacktriangleleft$$

Из доказанной формулы получаем еще один способ вычисления $\Delta\vec{a}$:

$$\Delta\vec{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) .$$

Из этой формулы для $\Delta\vec{a}$ виден следующий важный факт: вектор $\Delta\vec{a}$ не зависит от выбора системы координат.

Отметим следующие основные формулы для вычисления лапласиана от векторной функции.

1. $\Delta(C\vec{a}) = C \cdot \Delta\vec{a}$ (C — постоянная скалярная величина).

2. $\Delta(\vec{a} + \vec{b}) = \Delta\vec{a} + \Delta\vec{b}$.

3. $\Delta(\vec{C} \cdot \varphi) = \vec{C} \cdot \Delta\varphi$ ($\vec{C}$ — постоянный вектор).

4. Оператор Лапласа перестановочен с операторами grad, div, rot, т. е.

$$\Delta(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{grad}(\Delta\varphi), \quad \Delta(\operatorname{div}\vec{a}) = \operatorname{div}(\Delta\vec{a}), \quad \Delta(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{rot}(\Delta\vec{a}) .$$

Литература

1. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : учебник для бакалавров. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2014.

2. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 5-е изд. — СПб. : Лань, 2008.

3. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа. В 2 т. / С. М. Никольский. — 3-е изд. — М. : Наука, 1983.

4. *Толстов, Г. П.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 2 / Г. П. Толстов. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.

5. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2, 3 / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 2001.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Учебное издание

Аксенов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 4

Учебник и практикум для вузов

Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 25,38

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru